Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny, 2008–2009-es tanév

MATEMATIKA, III. kategória

a gimnáziumok speciális matematikai osztályainak tanulói részére

Az első forduló feladatainak megoldásai

Kérjük a javító tanárokat, hogy a feladatok javításakor vegyék figyelembe a versenyzők számára kiadott tájékoztatót. Külön is felhívjuk szíves figyelmüket arra, hogy minden feladatra csak egy helyes megoldásért jár a megfelelő pontszám. Kérjük, hogy a dolgozatokon konkrétan jelezzék a hibákat és az egyes feladatokra adott pontszámot, a dolgozat kijavítása után pedig töltsék ki a dolgozathoz mellékelt értékelő lap rovatait. A dolgozatokat nem kell osztályzattal minősíteni. A pontszámok indokolt esetben bonthatók.

A III. kategóriában versenyző tanulók dolgozatait 15 ponttól kell továbbküldeni az iskolákból, **közvetlenül a versenybizottságnak**: OKTV Matematika III., Oktatási Hivatal, 1363 Budapest, Pf. 19. A feltételeknek megfelelő dolgozatok közül azonban csak azok küldhetők tovább, amelyek tartalmazzák legalább két feladat lényegében teljes (5–7 pontos) megoldását. Tájékoztatásul megjegyezzük, hogy a versenyszabályzat alapján idéntől a Versenybizottság legfeljebb 50 versenyzőt juttathat be a döntőbe (a korábbi legfeljebb 30 helyett).

A pontozási útmutatóban nem szereplő más helyes megoldás vagy megoldásrészlet esetén az arányos pontszámot szíveskedjenek megadni.

Budapest, 2008. november A versenybizottság

1. feladat

Legyen $f(x) = 2$, ha $x \geq 0$, és $f(x) = 1$, ha $x < 0$. Legyen továbbá $g(x) = f(x)/f(x-1)$, és végül

$$h(x) = g(x) + 2\,g(x/2) + 3\,g(x/3) + \ldots + 2008\,g(x/2008).$$

Számítsuk ki $h(\pi)$-t.

Megoldás: $g(x) = 1$, ha $x \geq 1$ vagy $x < 0$, és $g(x) = 2$, ha $0 \leq x < 1$. (2 pont)

Így tetszőleges $j > 0$ egészre $g(\pi/j) = 1$, ha $\pi > j$, azaz $j \leq 3$, és $g(\pi/j) = 2$, ha $\pi < j$, azaz $j \geq 4$. (2 pont)

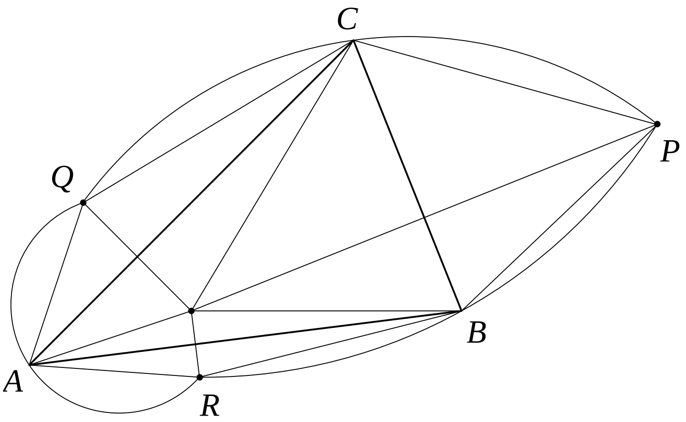
Ezért $h(\pi) = 1 + 2 + 3 + 2(4 + 5 + \ldots + 2008) = 6 + 2012 \cdot 2005 (= 4034066)$. (3 pont)

2. feladat

Tükrözzük az ABC hegyesszögű háromszög egy belső pontját az AB, BC, CA oldalakra, a tükörképeket jelölje rendre R, P, ill. Q. Bizonyítsuk be, hogy az AQR, PBR és PQC köröknek van közös pontja.

Első megoldás: A PBR és PQC körök egy közös pontjáról fogjuk belátni, hogy az AQR körhöz is hozzátartozik. Először tisztázzuk, hol keletkezhet ilyen közös pont a P ponton kívül.

A feladat feltételeiből következően az A, R, B, P, C, Q pontok ebben a sorrendben egy konvex hatszög csúcsai, amelynek az A, B, C csúcsokban levő szögei rendre az ABC háromszög szögeinek a kétszeresével, 2α-val, 2β-val, 2γ-val egyenlők. (2 pont)



Emiatt az RBP és a PCQ körívnek a P közös végponton kívül más közös pontja nem lehet. Tehát e két kör kölcsönös helyzetét tekintve csak az alábbi három eset lehetséges:

(1) a két kör érintkezik a P pontban (megengedve a két kör egybeesésének a lehetőségét is),

(2) a két kör metszi egymást egy olyan (P-től különböző) X pontban, amely nem tartozik sem az RBP ívhez, sem a PCQ ívhez, hanem mindkettőnek a kiegészítő körívén van,

(3) a két kör P-től különböző X metszéspontja az RBP és PCQ ívek közül az egyiken, és a másiknak a kiegészítő ívén van rajta. (2 pont)

Az (1) esetben a P-beli közös érintőnek a PR félegyenessel alkotott (a B pontot tartalmazó) szöge az érintőszárú kerületi szögek tétele alapján egyenlő $(\pi - 2\beta)$-val, hasonlóképpen a PQ félegyenessel alkotott, C-t tartalmazó szöge egyenlő $(\pi - 2\gamma)$-val. Ezért $RPQ\sphericalangle = \pi - \big((\pi - 2\beta) + (\pi - 2\gamma)\big) = \pi - 2\alpha$. Ebből következik, hogy az $ARPQ$ négyszög húrnégyszög, tehát az AQR kör is áthalad a P ponton. (1 pont)

A (2) esetben az $XRBP$ és az $XPCQ$ húrnégyszögekre hivatkozva kapjuk, hogy $RXQ\sphericalangle = RXP\sphericalangle + PXQ\sphericalangle = (\pi - 2\beta) + (\pi - 2\gamma) = 2\alpha$. Az X pont a QR egyenesnek ugyanahhoz a félsíkjához tartozik, mint az A pont, és X-ből a QR szakasz ugyanakkora szögben látszik, mint A-ból, ezért X illeszkedik az AQR körre. (1 pont)

A (3) esetben tegyük fel például, hogy X hozzátartozik az RBP ívhez és PCQ komplementer ívéhez. (A fordított eset hasonlóan számolható.) Ekkor $RXP\sphericalangle$ és $RBP\sphericalangle = 2\beta$ azonos íven nyugvó, míg $PXQ\sphericalangle$ és $PCQ\sphericalangle = 2\gamma$ kiegészítő íveken nyugvó kerületi szögek. Ezért $RXQ\sphericalangle = RXP\sphericalangle - PXQ\sphericalangle = 2\beta - (\pi - 2\gamma) = \pi - 2\alpha$, ahonnan az (1) esethez hasonlóan adódik, hogy X illeszkedik az AQR körre. (1 pont)

Második megoldás: Használjunk előjeles, irányított szögeket: $UVW\measuredangle$ jelölje azt a (modulo π értelmezett) előjeles szögelfordulást, amellyel az UV egyenes a VW egyenessel párhuzamos helyzetbe mozgatható. (1 pont)

(Előrebocsátjuk, hogy az irányított szögek használatának két konkrét előnye van a szokásos szögfogalommal szemben:

1. Az $UVW\measuredangle + WVY\measuredangle = UVY\measuredangle$ összegformula érvényes tekintet nélkül arra, hogy a szögszárak milyen sorrendben követik egymást.

2. Ha U és Y két különböző pont, akkor az $UVY\measuredangle = UWY\measuredangle$ formula azzal egyenértékű, hogy az U, V, W és Y pontok egy körön (vagy egyenesen) helyezkednek el, attól függetlenül, hogy V és W az UY egyenesnek melyik félsíkjába esnek.

Ennek köszönhetően a feladat megoldásában nincs szükség esetszétválasztásra, ha irányított szögeket használunk.)

Legyen X a PBR és PQC körök P-től különböző közös pontja, illetve $X = P$, ha a két kör P-ben érintkezik vagy azonos. Az utóbbi esetben XP egyenesen az ottani közös érintőt értjük. Ekkor $RXQ\measuredangle = RXP\measuredangle + PXQ\measuredangle = RBP\measuredangle + PCQ\measuredangle = -2\beta - 2\gamma = 2\alpha = RAQ\measuredangle$, és emiatt R, A, Q és X egy körön van. (6 pont)

Megjegyzések: 1. Az első megoldásbeli (1) esetben $BPC\sphericalangle = \pi - \big((\pi/2 - \beta) + (\pi/2 - \gamma)\big) = \pi - \alpha$. Tehát a PBR és PQC körök csak akkor érintik egymást P-ben, ha a P tükörkép az ABC háromszög köré írt körre esik. Tudjuk, hogy a háromszög magasságpontja az egyetlen olyan pont, amelynek mindhárom tükörképe a körülírt körre illeszkedik; ebben az esetben mindhárom vizsgált kör a körülírt körrel azonos.

2. Könnyen látható, hogy a három kör közös pontja mindig illeszkedik az ABC háromszög körülírt körére is. Például a második megoldás módszerével ezt a $BXC\measuredangle = BXP\measuredangle + PXC\measuredangle = BRP\measuredangle + PQC\measuredangle = (\pi/2 - \beta) + (\pi/2 - \gamma) = \alpha$ számolás mutatja.

3. A második megoldás akkor is alkalmazható, ha az ABC háromszögről nem tesszük föl, hogy hegyesszögű, és P-ről sem tesszük föl, hogy a háromszög belső pontja. Csupán bizonyos pontok nem kívánt egybeesése vagy kollinearitása esetére kell a feladat állítását értelemszerűen módosítani, egyébként ilyen általánosabb feltételek mellett is igaz marad.

3. feladat

Legyen n pozitív egész. Mutassuk meg, hogy akkor és csak akkor létezik racionális számok négyzeteiből álló, n differenciájú, háromtagú számtani sorozat, ha létezik n területű, racionális oldalú, derékszögű háromszög.

Első megoldás: Tegyük fel, hogy egy derékszögű háromszög területe n és az oldalai az a, b, c racionális számok, ahol c az átfogó. Ekkor $a^2 + b^2 = c^2$ és $ab/2 = n$. (1 pont)

Ennek alapján

$$\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{ab}{2} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 - n \text{ és } \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{ab}{2} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + n.$$

(2 pont)

Tehát az $\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$, $\left(\frac{c}{2}\right)^2$ és $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ számok egy n differenciájú számtani sorozatot alkotnak. (1 pont)

A megfordítás a fenti lépések értelemszerű megfordításából fog adódni. Tegyük tehát fel, hogy $x^2 = y^2 - n$ és $z^2 = y^2 + n$ teljesül alkalmas x, y és z pozitív racionális számokra ($x = 0$ esetén $z^2 = 2y^2$ teljesülne, ami ellentmond a $\sqrt{2}$ irracionalitásának). Ekkor $x < z$ és legyen [$(a-b)/2 = x$, $(a+b)/2 = z$ és $c/2 = y$ alapján] $a = z + x$, $b = z - x$ és $c = 2y$. (1 pont)

Ekkor $a^2 + b^2 = 2(z^2 + x^2) = 4y^2 = c^2$, tehát az a, b, c (racionális) számok valóban egy derékszögű háromszög oldalai, amelynek területe $ab/2 = (z^2 - x^2)/2 = 2n/2 = n$. (2 pont)

Második megoldás: Fel fogjuk használni a racionális oldalú derékszögű háromszögek oldalainak paraméteres előállítását, az ún. pitagoraszi számhármasokra vonatkozó képletet. Ennek alapján pozitív racionális a, b, c számokra $a^2 + b^2 = c^2$ pontosan akkor teljesül, ha $a = rA$, $b = rB$, $c = rB$, ahol r racionális, A, B, C relatív prím egészek, és $A = 2st$, $B = s^2 - t^2$ (vagy fordítva), $C = s^2 + t^2$, ahol $(s,t) = 1$, $s > t > 0$ és $s + t$ páratlan.

Egy ilyen háromszög területe (i) $ab/2 = r^2AB/2 = r^2st(s^2 - t^2) = r^2st(s-t)(s+t)$. (1 pont)

Másrészt alkossanak az x, y, z (pozitív) racionális számok négyzetei (növekvő) számtani sorozatot: $x^2 + z^2 = 2y^2$. Ekkor $((z-x)/2)^2 + ((z+x)/2)^2 = y^2$, vagyis a $(z-x)/2$, $(z+x)/2$ és y racionális számok egy derékszögű háromszög oldalai, ahol az átfogó y. (2 pont)

A karakterizáció szerint $(z-x)/2 = w(u^2 - v^2)$, $(z+x)/2 = 2wuv$ (vagy fordítva) és $y = w(u^2 + v^2)$, ahol w racionális, $u > v > 0$ egész, $(u,v) = 1$ és $u + v$ páratlan. Innen $z = w(u^2 + 2uv - v^2)$ (és $x = w|u^2 - 2uv - v^2|$). (2 pont)

A számtani sorozat differenciája $z^2 - y^2 = (z-y)(z+y) = w^2(2uv - 2v^2)(2u^2 + 2uv) = (2w)^2uv(u-v)(u+v)$, ami megegyezik (i)-vel ($r = 2w$, $s = u$, $t = v$). Tehát az n a területek között pontosan akkor fordul elő, ha a számtani sorozatok differenciái között is megtalálható. (2 pont)

4. feladat

Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok körében:

$$\frac{1}{x-1} + \frac{3}{x-3} + \frac{7}{x-7} + \frac{9}{x-9} = x^2 - 5x - 4.$$

Első megoldás: Azonnal leolvasható, hogy $x = 0$ és $x = 5$ megoldás. (1 pont)

Mivel a bal oldalon álló törtek nevezői $x - 5$-re szimmetrikusak, ezért a további megoldások megkereséséhez érdemes az $y = x - 5$ új változót bevezetni. (1 pont)

Itt a két szélső, illetve a két középső törtet közös nevezőre hozva

$$\frac{10y + 32}{y^2 - 16} + \frac{10y + 8}{y^2 - 4} = y^2 + 5y - 4, \qquad \text{(1 pont)}$$

majd a beszorzást elvégezve és rendezve $y^6 + 5y^5 - 24y^4 - 120y^3 + 104y^2 + 520y = 0$ adódik. (1 pont)

Az elején megállapítottuk, hogy $y = 0$ és $y = -5$ megoldás, így a bal oldalon $y(y+5)$ kiemelhető. (1 pont)

Ezzel leosztva, az $y^4 - 24y^2 + 104 = 0$ egyenlet adódik, amelyet y^2-re, onnan y-ra megoldva és az $x = y + 5$ helyettesítést alkalmazva kapjuk, hogy a már korábban megállapított $x = 0$ és $x = 5$ értékek mellett az egyenletre további négy megoldást nyerünk, ezek $x = 5 \pm \sqrt{12 \pm \sqrt{40}}$. (2 pont)

Második megoldás: Azonnal leolvasható, hogy $x = 0$ és $x = 5$ megoldás. (1 pont)

A törteknél a $\frac{c}{x-c} = \frac{c-x}{x-c} + \frac{x}{x-c} = -1 + \frac{x}{x-c}$ átalakítást elvégezve, majd mindkét oldalhoz 4-et hozzáadva és (az $x \neq 0$ megoldások kereséséhez) x-szel osztva

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-7} + \frac{1}{x-9} = x - 5$$

adódik. (2 pont)

A bal oldalon a két szélső, illetve két középső törtet közös nevezőre hozva kapjuk, hogy

$$\frac{2x-10}{x^2-10x+9}+\frac{2x-10}{x^2-10x+21}=x-5. \qquad (1 \text{ pont})$$

Itt (az $x \neq 5$ megoldásokat keresve) leosztunk $x-5$-tel, majd bevezetjük (pl.) az $u = x^2-10x+15$ új változót. (1 pont)

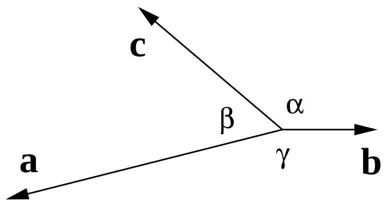
Az így adódó $u^2-4u-36=0$ egyenletet u-ra megoldjuk, és a kapott $u=2\pm\sqrt{40}$ értékekkel az $u=x^2-10x+15$ egyenlet(ek)ből az $x=5\pm\sqrt{12\pm\sqrt{40}}$ megoldásokat nyerjük. (2 pont)

5. feladat

Mennyi $2\cos\alpha+6\cos\beta+3\cos\gamma$ minimuma, ha α, β, $\gamma \geq 0$ és $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$?

Megoldás: A nagyobb együtthatójú szögeket úgy választva, hogy a koszinuszuk a lehető legkisebb, azaz -1 legyen, azt kapjuk, hogy $\beta=\gamma=\pi$, $\alpha=0$ esetén a fenti összeg -7. (2 pont)

Megmutatjuk, hogy ez a minimum. Ha α, β és γ a feltételeknek eleget tevő tetszőlegesen adott valós számok, válasszuk meg az origóból kiinduló **a**, **b** és **c** vektorokat, amelyek hossza rendre 3, 1, illetve 2 úgy, hogy az **a** vektort a **b** vektor irányába γ szögű, **b**-t **c** irányába α szögű, és **c**-t **a** irányába β szögű pozitív forgatás vigye.



Ekkor az $(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})^2$ skaláris szorzatra

$$0 \leq (\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})^2=\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2+2\mathbf{ab}+2\mathbf{ac}+2\mathbf{bc}=9+1+4+2(3\cos\gamma+6\cos\beta+2\cos\alpha),$$

ahonnan átrendezéssel a kívánt $2\cos\alpha+6\cos\beta+3\cos\gamma \geq -7$ adódik (itt $\mathbf{x}^2$ és $\mathbf{xy}$ a megfelelő skaláris szorzatot jelöli) . (5 pont)