Oktatási Hivatal

Az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
2009-2010. tanévi második fordulójának feladatmegoldásai
matematikából, a II. kategória (GIMNÁZIUM) számára

1. Adott az $x(x^2+y^2)+y(x^2+y^2)-4x-4y=0$ egyenletű alakzat. Ennek az alakzatnak melyik pontja van legközelebb a $P(-\frac{3}{2};\frac{5}{2})$ ponthoz?

Megoldás: Az alakzat egyenletének bal oldala szorzattá alakítható:

$$(x+y)(x^2+y^2-4)=0.$$

Ezek szerint alakzatunk az $x+y=0$ egyenletű e egyenes és az $x^2+y^2-4=0$ egyenletű origó középpontú kettő sugarú k kör egyesítése. 3 pont

P pontnak az e-re eső merőleges vetülete legyen E. A P-n átmenő e-re merőleges egyenes az $x-y+4=0$, így E koordinátái $(-2;2)$ és ebből $PE=\frac{1}{\sqrt{2}}\approx 0,7$. 2 pont

P-nek a k-tól való távolsága $PO-2$, ahol O az origó, k középpontja, 2 pedig k sugara. Ezek szerint P távolsága k-tól

$$\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2}-2\approx 0,9.$$ 2 pont

A keresett pont $E(-2;2)$.

Összesen: 7 pont

Meghatározhatjuk P távolságát e-től a normálegyenletbe helyettesítve is. A pont egyenes távolság a függvénytáblában is szerepel, erre is hivatkozhat a versenyző.

2. Bizonyítsuk be, hogy 55 darab egymást követő egész szám négyzetének összege nem lehet négyzetszám.

Megoldás: Jelölje az 55 szám közül a középsőt x. Ekkor a feladatban szereplő S összeg így néz ki:

$$S=(x-27)^2+(x-26)^2+...+(x+26)^2+(x+27)^2=55x^2+2(1^2+2^2+3^2+...+27^2).$$

Felhasználjuk hogy az első n négyzetszám összege

$$1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Ezek alapján

$$S = 55x^2 + 2\frac{27 \cdot 28 \cdot 55}{6} = 55(x^2 + 9 \cdot 28). \qquad \text{3 pont}$$

Az így kapott összefüggés szerint S osztható 55-tel, azaz 5-tel és 11-gyel. Az 5 és 11 prímek, amennyiben S négyzetszám, akkor az 5 és 11 is páros kitevőn szerepel S prímtényezős felbontásában. Ezek szerint van olyan y egész szám, amelyre $S = (5 \cdot 11)^2 y^2$, és ekkor

$$x^2 + 9 \cdot 28 = 55y^2. \qquad \text{2 pont}$$

A jobb oldal osztható 5-tel, tehát 0-ra, vagy 5-re végződik. A bal oldalon $9 \cdot 28$ utolsó jegye 2, viszont x^2 utolsó jegye nem lehet sem 8 sem 3, így a két oldal nem lehet egyenlő, azaz S nem lehet négyzetszám. 2 pont

Összesen: 7 pont

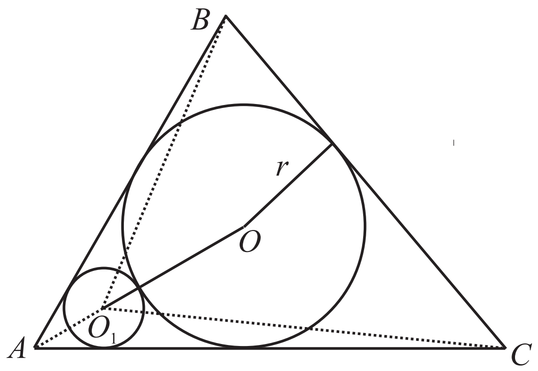
A megoldás utolsó lépésére egy másik lehetőség: egyenletünkben 28 osztható 7-tel, ezért a 7-es maradékokat vizsgáljuk. A négyzetszámok 7-es maradéka lehet 0, 1, 4 vagy 2. Ezek szerint $55y^2$ 7-es maradéka lehet 0, 6, 3 vagy 5. A lehetőségek közül csak a 0 szerepel mindkét esetben. Ezért legutóbbi egyenletünk jobb és bal oldalának hetes maradéka csak úgy lehet egyenlő, ha x^2 és $55y^2$ is osztható 7-tel. Viszont ekkor x^2 és $55y^2$ is osztható 49-cel, a $9 \cdot 28$ pedig nem osztható 49-cel. Így a bal oldal 49-cel nem osztható, jobb oldal 49-cel osztható, ami ellentmondás, tehát S nem lehetett négyzetszám.

3. Egy háromszög belsejébe helyezzünk el három olyan kört, amelyek érintik a háromszög két-két oldalát, továbbá kívülről érintik a háromszög beírt körét. Bizonyítsuk be, hogy e három kör sugarának összege nem kisebb a beírt kör sugaránál.

Megoldás: Jelölje az A csúcshoz legközelebbi kis kör középpontját O_1, sugarát r_1, a beírt kör középpontját O, sugarát r. Az ABC háromszöget három részre bontva kapjuk, hogy

(1) $$t_{ABC} = t_{AO_1B} + t_{AO_1C} + t_{BO_1C}.$$

1 pont



Az (1) ben szereplő területek közül háromra

$$2t_{ABC} = r(a + b + c); \quad 2t_{AO_1B} = r_1 c; \quad 2t_{AO_1C} = r_1 b. \qquad \text{1 pont}$$

A negyedik területet becsüljük, az O_1-hez tartozó magasság legfeljebb akkora, mint $2r+r_1$, tehát

$$2t_{BO_1C} \leq (2r+r_1)a.$$ 3 pont

Ezek felhasználásával (1) így alakul

$$r(a+b+c) \leq r_1(a+b+c) + 2ra.$$

Hasonlóan a másik két kis körnél kapjuk, hogy

$$r(a+b+c) \leq r_2(a+b+c) + 2rb \quad \text{és} \quad r(a+b+c) \leq r_3(a+b+c) + 2rc.$$

A három egyenlőtlenség megfelelő oldalait összeadva kapjuk

$$3r(a+b+c) \leq (r_1+r_2+r_3)(a+b+c) + 2r(a+b+c),$$

amiből megkapjuk a bizonyítandó egyenlőtlenséget

$$r \leq r_1 + r_2 + r_3. \tag{2}$$

1 pont

A BO_1C háromszög területének becslésénél az O_1-hez tartozó magasság pontosan akkor lesz $2r+r_1$, ha az A csúcsból induló szögfelező egyben magasságvonal is, azaz $b=c$. (2)-ben tehát akkor és csak akkor van egyenlőség, ha $a=b=c$, azaz a háromszög szabályos.

1 pont

Összesen: 7 pont.

4. Hány megoldása van a következő egyenletnek?

$$2009 = \frac{\{x\}[x]}{x}$$

$[x]$ az x valós szám egészrésze, az x-nél nem nagyobb egészek közül a legnagyobb.
$\{x\}$ az x valós szám törtrésze, értéke $\{x\} = x - [x]$.

Megoldás: Ha x egész, akkor a tört számlálójában $\{x\} = 0$ tehát maga a tört is 0, így egész megoldás nem lehet. 1 pont

Ha $x > 0$, akkor $\{x\}[x] \leq [x] \leq x$, a jobb oldal nem lehet 1-nél nagyobb. 1 pont

A tört nevezője 0 nem lehet, ezért $x \neq 0$, a továbbiakban tehát $x < 0$.

Ha $x < -1$, akkor $2x < x-1$ és így

$$\frac{x-1}{x} < 2.$$

Ebből az adódik, hogy $x < -1$ esetén nem lehet megoldás, hiszen figyelembe véve, hogy x és $[x]$ is negatív

$$\frac{\{x\}[x]}{x} < \frac{[x]}{x} < \frac{x-1}{x} < 2.$$ 3 pont

Amennyiben $-1 < x < 0$, akkor $[x] = -1$, és $\{x\} = x - [x] = 1 + x$. A kitűzött egyenlet így alakul:

$$2009 = \frac{-(1+x)}{x}, \quad \text{amiből} \quad x = -\frac{1}{2010}.$$

Bebizonyítottuk, hogy más megoldás nem lehet, az egyetlen lehetséges gyököt az eredeti egyenletbe helyettesítve valóban jó megoldást kapunk. 2 pont

Összesen: 7 pont.