Oktatási Hivatal

Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny, 2009–2010-es tanév

MATEMATIKA, III. kategória

a gimnáziumok speciális matematikai osztályainak tanulói részére

Az első forduló feladatainak megoldásai

Kérjük a javító tanárokat, hogy a feladatok javításakor vegyék figyelembe a versenyzők számára kiadott tájékoztatót. Külön is felhívjuk szíves figyelmüket arra, hogy minden feladatra csak egy helyes megoldásért jár a megfelelő pontszám. Kérjük, hogy a dolgozatokon konkrétan jelezzék a hibákat és az egyes feladatokra adott pontszámot, a dolgozat kijavítása után pedig töltsék ki a dolgozathoz mellékelt értékelő lap rovatait. A dolgozatokat nem kell osztályzattal minősíteni. A pontszámok indokolt esetben bonthatók.

A III. kategóriában versenyző tanulók dolgozatait 15 ponttól kell továbbküldeni az iskolákból, **közvetlenül a versenybizottságnak**: OKTV Matematika III., Oktatási Hivatal, 1363 Budapest, Pf. 19. A feltételeknek megfelelő dolgozatok közül azonban csak azok küldhetők tovább, amelyek tartalmazzák legalább két feladat lényegében teljes (5–7 pontos) megoldását. Tájékoztatásul megjegyezzük, hogy a versenyszabályzat alapján a Versenybizottság legfeljebb 50 versenyzőt juttathat be a döntőbe.

A pontozási útmutatóban nem szereplő más helyes megoldás vagy megoldásrészlet esetén az arányos pontszámot szíveskedjenek megadni.

Budapest, 2009. november — A versenybizottság

1. feladat

Igazoljuk, hogy egy 2009 csúcsú teljes gráf élei megszámozhatók az $1, 2, \ldots, \binom{2009}{2}$ számokkal úgy, hogy az egy csúcsba befutó élek számainak az összege semelyik két csúcsnál se legyen azonos.

Megoldás: A tetszőleges $n \geq 3$-ra vonatkozó megfelelő állítást teljes indukcióval igazoljuk. Az állítás $n = 3$-ra nyilvánvaló. (1 pont)

Tegyük fel, hogy az állítás $n-1$-re igaz, és vegyünk egy n csúcsú teljes gráfot. Ebben egy $n-1$ csúcsú teljes részgráf éleit számozzuk meg az $1, 2, \ldots, k = \binom{n-1}{2}$ számokkal úgy, hogy az egy csúcsba befutó élek számainak az összege semelyik két csúcsnál se legyen azonos (ezt az indukciós feltétel alapján megtehetjük). (1 pont)

Jelölje ezt az $n-1$ csúcsot $c_1, \ldots, c_{n-1}$ és a c_i csúcsba befutó élek számainak összegét a_i úgy, hogy $a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1}$ teljesüljön.

Most megadjuk a kimaradt n-edik csúcshoz tartozó élek számozását: az onnan a c_i csúcsba vezető él száma legyen $k + i$ $(i = 1, 2 \ldots, n-1)$. (3 pont)

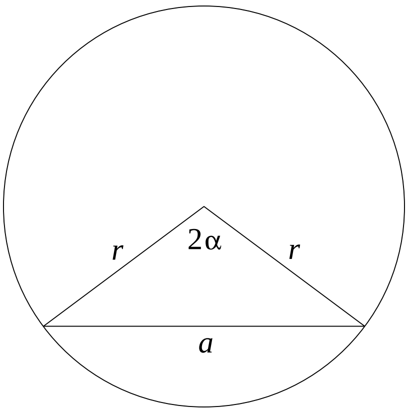
Ekkor a $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ csúcsba futó élek számainak összege rendre $a_1 + k + 1 < a_2 + k + 2 < \cdots < a_{n-1} + k + (n-1)$, továbbá az n-edik csúcsba futó élek számainak összege ezeknél nagyobb, hiszen a legnagyobb $n-1$ szám került azokra az élekre. Így az n csúcsú teljes gráf éleinek egy megfelelő számozásához jutottunk. (2 pont)

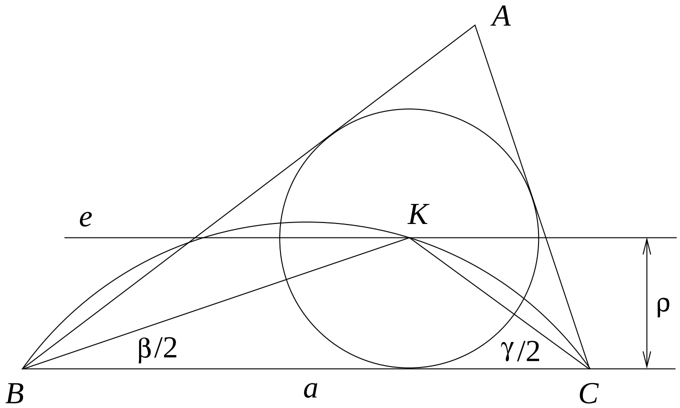
2. feladat

Szerkesszünk háromszöget, ha ismert egy oldala, továbbá a beírt és a körülírt kör sugara. (Feltesszük, hogy létezik a megadott adatokkal háromszög, így a megoldhatóság feltételét nem kell vizsgálni, csak a megoldások számát.)

Első megoldás: Jelölje a az adott oldalhosszt, α a szemközti szöget, r és ρ a körülírt, illetve a beírt kör sugarát. A körülírt körben az a hosszúságú húrhoz 2α középponti szög tartozik, így α az a, r, r oldalú háromszög segítségével megszerkeszthető. (1 pont)

Rögzítsük az a hosszúságú BC oldalszakaszt. A háromszögnek ez az oldala a beírt kör K középpontjából $180° - (\beta/2 + \gamma/2) = 90° + \alpha/2$ szögben látszik. (2 pont)

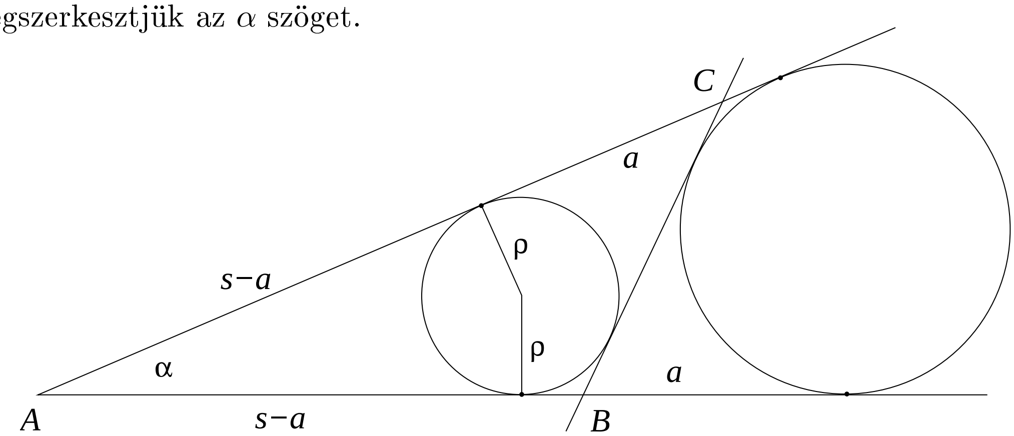




Ezért a K pontot egy ehhez a szöghöz tartozó látószög-körív, valamint a BC egyenestől ρ távolságra haladó párhuzamos e egyenes közös pontjaként nyerhetjük. Megszerkesztjük a beírt kört a most kapott K középponttal és az adott ρ sugárral, és végül a B-ből és C-ből húzott érintők metszéspontjaként előáll az A csúcs. (2 pont)

Diszkusszió: A megoldásban az α szögre két, egymást 180°-ra kiegészítő érték adódik (amelyek különbözők, hacsak nem $a = 2r$) aszerint, hogy a körülírt körben melyik (konvex vagy konkáv) középponti szöget választjuk az a hosszúságú húrhoz. Ha α-t rögzítettük, akkor a szerkesztés további lépései már egybevágóság erejéig egyértelműen szolgáltatják a megoldást. A megoldások száma 1 vagy 2 aszerint, hogy az α megválasztásából adódó két lehetséges látószög-körív közül az e egyenesnek csak az egyikkel, vagy mindkettővel van közös pontja. (2 pont)

Második megoldás: Használjuk az első megoldás jelöléseit. Az első megoldáshoz hasonlóan megszerkesztjük az α szöget. (1 pont)

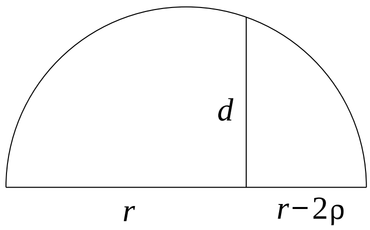


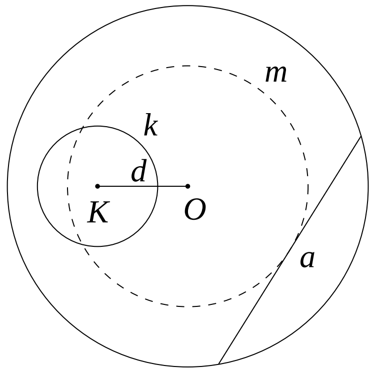
Megrajzoljuk az A csúcsú, α nagyságú szögtartományt és megszerkesztjük a szárakat érintő ρ sugarú kört, amely a szerkesztendő háromszög beírt köre lesz. (1 pont)

Az A csúcsból húzott érintőszakaszok hossza $s-a$, ahol s a háromszög félkerületét jelöli. Az érintőszakaszokat a-val meghosszabbítva a BC oldalhoz hozzáírt kör érintési pontjaihoz jutunk. Megszerkesztjük ezt a hozzáírt kört. Végül a két kör egyik belső közös érintőegyenese a szögszárakból kimetszi a B és a C csúcsot. (3 pont)

Diszkusszió: Az első megoldáshoz hasonlóan α-ra 1 vagy 2 lehetséges szögérték adódik. Ha α-t rögzítettük, a megoldás már egybevágóság erejéig egyértelmű, de nem feltétlenül létezik mindkét esetben (a megoldás adott esetbeli létezéséhez a két megszerkesztett körnek nem szabad egymásba nyúlnia). (2 pont)

Harmadik megoldás: Használjuk az első megoldás jelöléseit, továbbá legyen d a beírt kör és a körülírt kör középpontjának a távolsága. Az Euler-féle $d^2 = r^2 - 2\rho r$ képlet alapján d mértani középarányos r és $r-2\rho$ között, ezért megszerkeszthető. (2 pont)





Vegyük föl az O és a K pontot egymástól d távolságra, és rajzoljunk körülöttük kört r, illetve ρ sugárral; ezek lesznek a a megszerkesztendő háromszög körülírt, illetve beírt köre. (1 pont)

Olyan a hosszúságú BC húrt kell találnunk a nagyobbik körben, amely érinti a kisebbik k kört. Az a hosszúságú húrok érintik az O középpontú, $\sqrt{r^2-(a/2)^2}$ sugarú m kört (illetve áthaladnak O-n, ha $a=2r$). Megrajzoljuk az m kört. (1 pont)

A keresett BC húrt megkapjuk mint a k és az m kör közös érintőjének (illetve az O-ból m-hez húzott érintőnek, ha $a=2r$) a körülírt körbe eső szakaszát. Végül az akár B-ből, akár C-ből m-hez húzott másik érintő a körülírt körből kimetszi az A csúcsot. (1 pont)

Diszkusszió: Az $a=2r$ esetben egybevágóság erejéig egyetlen (derékszögű) megoldás van. Ha $a<2r$, akkor aszerint kapunk 1 vagy 2 különböző megoldást, hogy a k és az m körnek csak külső, vagy pedig külső és belső közös érintője is van (azaz egymásba nyúlnak vagy sem). (2 pont)

Megjegyzés: A feladatban eleve feltettük, hogy az a, r, ρ adatok valamely háromszöghöz tartoznak. Ha ezt nem tudnánk, felmerülne a kérdés, hogy milyen feltételeket kell ezekre a számokra kiróni, hogy egyáltalán létezzen ilyen háromszög. Az $a \le 2r$ és a $2\rho \le r$ egyenlőtlenségnek nyilván teljesülnie kell. Egy további szükséges, és ezekkel együtt elégséges feltételt legkönnyebben a harmadik megoldásból lehet kiolvasni: az m kör nem tartalmazhatja a belsejében a k kört. Ez a $\sqrt{r^2-(a^2/4)} \le \rho + \sqrt{r(r-2\rho)}$ egyenlőtlenséggel egyenértékű.

3. feladat

Oldjuk meg a $(2x+2)(5-2x)(4x^2+8x+11)=10(2x+3)^2$ egyenletet a valós számok körében.

Első megoldás: $x=-3/2$ nem megoldás, hiszen ekkor az egyenlet jobb oldala 0, a bal oldalon viszont egyik tényező sem 0. Így ekvivalens lépés, ha az egyenletet $(2x+3)^2$-tel leosztjuk (és a bal oldalon az első két tényezőt összeszorozzuk):

$$\frac{-4x^2+6x+10}{2x+3}\cdot\frac{4x^2+8x+11}{2x+3}=10 \qquad \text{(1 pont)}$$

A bal oldalon levő két törtet rendre A-val, illetve B-vel jelölve azt kapjuk, hogy $AB=10$ és $A+B=7$. (3 pont)

Innen $A=5$ és $B=2$, vagy $A=2$ és $B=5$. (1 pont)

Az $A=5$, $B=2$ egyenlőségek mindegyike a $4x^2+4x+5=0$, az $A=2$, $B=5$ egyenlőségek mindegyike pedig a $2x^2-x-2=0$ egyenletet jelenti. Az elsőnek nincs valós gyöke, a második gyökei $(1\pm\sqrt{17})/4$; ezek adják tehát az eredeti egyenlet összes megoldását. (2 pont)

Második megoldás: A műveleteket elvégezve a $16x^4+8x^3-4x^2-26x-20=0$ egyenlethez jutunk. (1 pont)

A $z=2x$ új ismeretlen bevezetésével $f(z)=z^4+z^3-z^2-13z-20=0$ adódik. (1 pont)

Az $f(z)$ polinomot felbontjuk két alacsonyabb fokú egész együtthatós polinom szorzatára, és így $f(z)$ gyökeit majd ezen két polinom gyökei adják. Első- és harmadfokú szorzatára nem tudjuk bontani, mert akkor a $z-c$ osztó egy egész gyököt jelentene, azonban ilyen nincs, mert $z\le -2$-re és $z\ge 3$-ra $f(z)>0$, $-1\le z\le 2$-re pedig $f(z)<0$. (1 pont)

Az $f(z)=(z^2+az+b)(z^2+cz+d)$ egyenlőségben a jobb oldalon a szorzást elvégezve, majd az együtthatókat összehasonlítva a $bd=-20$, $ad+bc=-13$, $b+d+ac=-1, a+c=1$ diofantikus egyenletrendszerhez jutunk. (1 pont)

Ezt megoldva (például az első egyenlet alapján a -20 összes osztópárját a többi egyenletbe szisztematikusan visszahelyettesítve) a $(z^2+2z+5)(z^2-z-4)$ felbontáshoz jutunk. (2 pont)

A $z^2+2z+5=0$ egyenletnek nincs valós gyöke, a $z^2-z-4=0$ egyenlet gyökeiből pedig $x=z/2=(1\pm\sqrt{17})/4$ adódik. (1 pont)

Harmadik megoldás: A műveleteket elvégezve a $16x^4+8x^3-4x^2-26x-20=0$ egyenlethez jutunk. (1 pont)

A $z=2x$ új ismeretlen bevezetésével $f(z)=z^4+z^3-z^2-13z-20=0$ adódik. (1 pont)

Az $f(z)$ polinomot két polinom négyzetének a különbségeként állítjuk elő, és ennek alapján fogjuk szorzattá bontani. Legyen u később alkalmasan megválasztandó paraméter, ekkor az egyenlet

$$\left(z^2+\frac{z}{2}+u\right)^2-\left(z^2\left(2u+\frac{5}{4}\right)+z(13+u)+(20+u^2)\right)=0 \qquad (*)$$

alakba írható. (1 pont)

A bal oldalon elöl egy polinom négyzete szerepel, az ebből levont másodfokú polinom akkor lesz egy (z-ben) elsőfokú polinom négyzete, ha a diszkriminánsa

$$(13+u)^2-(5+8u)(20+u^2)=-8u^3-4u^2-134u+69=0. \qquad \text{(1 pont)}$$

A $v=2u$ helyettesítéssel $v^3+v^2+67v-69=0$ adódik, amelynek láthatóan $v=1$ gyöke. (1 pont)

Így $(*)$ alapján az $u=v/2=1/2$ paraméterrel a

$$\left(z^2+\frac{z}{2}+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}z+\frac{9}{2}\right)^2=(z^2+2z+5)(z^2-z-4)=0$$

egyenlethez jutunk. (1 pont)

A $z^2+2z+5=0$ egyenletnek nincs valós gyöke, a $z^2-z-4=0$ egyenlet gyökeiből pedig $x=z/2=(1\pm\sqrt{17})/4$ adódik. (1 pont)

4. feladat

Egy pozitív egész számot négyzetteljesnek nevezünk, ha a törzstényezős felbontásában minden prím legalább a második hatványon szerepel. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sokszor lesz két szomszédos szám mindegyike négyzetteljes.

Első megoldás: A 8 és 9 szám megfelel ilyen számpárnak. Továbbá, ha n és $n+1$ is négyzetteljes, akkor nyilván $k=4n(n+1)$ és $k+1=(2n+1)^2$ is azok, ahol $n<k$, így ezt az eljárást iterálva végtelen sok megfelelő számpárt kapunk. (7 pont)

Második megoldás: Nyilván bármely $m>1$-re és $h>0$-ra m^2, illetve $8h^2$ négyzetteljesek, tehát elég belátni, hogy az $x^2-8y^2=1$ egyenletet végtelen sok pozitív egész számpár kielégíti. (2 pont)

Az egyenletnek $x=3$, $y=1$ nyilván megoldása. Ezt $(3-\sqrt{8})(3+\sqrt{8})=1$ alakba írva és négyzetre emelve $(17-6\sqrt{8})(17+6\sqrt{8})=1$ adódik, azaz $x=17$, $y=6$ újabb megoldás. (2 pont)

Általában, ha $x=a$, $y=b$ pozitív egész megoldás, akkor az $(a-b\sqrt{8})(a+b\sqrt{8})=1$ egyenlőséget négyzetre emelve $(a^2+8b^2-2ab\sqrt{8})(a^2+8b^2+2ab\sqrt{8})=1$, tehát $x=a^2+8b^2$, $y=2ab$ újabb megoldást jelent (hiszen $a^2+8b^2>a$). Az eljárást iterálva végtelen sok megoldást kapunk. (3 pont)

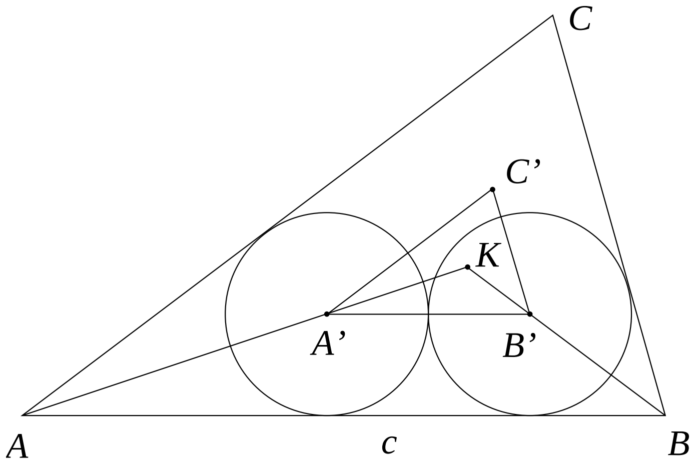
Megjegyzés: Négyzetre emelés helyett tetszőleges hatványra emelve azonnal adódik a végtelen sok megoldás.

5. feladat

Egységnyi területű háromszögben helyezzünk el két egymásba nem nyúló egyenlő sugarú körlemezt úgy, hogy együtt minél nagyobb területet fedjenek le. Az egységnyi területű háromszögek közül milyen alakú háromszög esetén lesz ez a lefedett terület a legnagyobb?

Megoldás: A lefedett terület akkor a legnagyobb, ha a körök sugara a lehető legnagyobb. Megmutatjuk, hogy legfeljebb $1-(\sqrt{2}/2)$ lehet a körök sugara, és ez a korlát csak az egyenlőszárú derékszögű háromszög esetében érhető el.

Tekintsük az ABC háromszöget és tegyük fel, hogy a leghosszabb oldal a C csúccsal szemben van, azaz $a \leq c$ és $b \leq c$. Helyezzünk el két egybevágó kört az ABC háromszögben úgy, hogy érintsék egymást, továbbá mindkettő érintse az AB oldalt és egy-egy további oldalt.



Ilyen köröket nyilván egyértelműen lehet találni, legyen r a sugaruk. Azt állítjuk, hogy akárhogyan helyezünk is el két egybevágó és egymásba nem nyúló körlemezt az ABC háromszögben, azok sugara nem lehet nagyobb ennél az r-nél.

Valóban, ha legalább r sugarú, egymásba nem nyúló köröket helyezünk el az ABC háromszögben, akkor azok középpontjai abba az $A'B'C'$ háromszögbe esnek, amelyet az oldalaktól r távolságra befelé húzott párhuzamosok fognak közre. Az $A'B'C'$ háromszögben a pontpárok között fellépő legnagyobb távolság a leghosszabb oldal, ami – az $A'B'C'$ és az ABC háromszög hasonlósága folytán – a $2r$ hosszúságú $A'B'$ oldal. Emiatt a körök sugara legfeljebb r lehet. (2 pont)

Most kifejezzük az r sugarat az ABC háromszög adataival. Legyen K és ρ az ABC háromszögbe beírt kör középpontja, illetve sugara. Az $A'B'K$ és az ABK háromszög hasonlóságának arányát egyrészt két oldal arányával, másrészt két magasság arányával írjuk fel $2r : c = (\rho - r) : \rho$ alakban, ahonnan átrendezve az

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho} + \frac{2}{c} \qquad (**)$$

képletet kapjuk. (1 pont)

Ha $AC \neq BC$, akkor mozdítsuk el a C pontot az AB egyenessel párhuzamosan az AB szakasz felezőmerőlegesén levő C^* pontba. Az ABC^* háromszög területe egyenlő az ABC háromszög területével, kerülete viszont kisebb az ABC háromszög kerületénél, hiszen C^* az A, B fókuszú, C-n áthaladó ellipszis belsejébe esik, ezért $AC^* + BC^* < AC + BC$. A $t = \rho s$ képletre hivatkozva ebből következik, hogy az ABC^* háromszögbe nagyobb kör írható, mint az ABC háromszögbe. A $(**)$ képlet alapján ezért az ABC^* háromszögbe r-nél nagyobb sugarú körökből álló párt írhatunk.

Elegendő tehát a továbbiakban egyenlőszárú ABC háromszöggel foglalkozni, amelyben a körök szimmetrikusan helyezkednek el, érintik egymást is, az AB alapot is, és egy-egy szárt is. (2 pont)

Vágjuk ketté a háromszöget a C-n áthaladó szimmetriatengelye mentén, ekkor a szóban forgó körök a keletkező derékszögű félháromszögek beírt körei. Az ABC háromszög pontosan akkor derékszögű, ha a két félháromszög egyenlőszárú. Ezért már csak azt kell megmutatnunk, hogy rögzített területű derékszögű háromszögek közül az egyenlőszárúnak van a lehető legnagyobb beírt köre.

Valóban, legyen a derékszögű háromszög $1/2$ területű. Befogói ekkor x és $1/x$, kerülete $x+1/x+\sqrt{x^2+1/x^2}$, beírt körének sugara pedig a terület és a félkerület hányadosa. Innen

$$r = \frac{1/2}{\frac{x+\frac{1}{x}+\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}}{2}} = \frac{1/2}{\frac{x+\frac{1}{x}}{2}+\frac{\sqrt{\frac{x^2+\frac{1}{x^2}}{2}}}{\sqrt{2}}} \leq \frac{1/2}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} = 1-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

ahol két tagban a számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenséget alkalmaztuk. Egyenlőség csak az $x = 1/x$ esetben, azaz egyenlőszárú derékszögű háromszög esetén áll fenn.

(2 pont)