Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny, 2009–2010-es tanév

MATEMATIKA, III. kategória

A döntő feladatai

a gimnáziumok speciális matematikai osztályainak tanulói részére

1. Igazoljuk, hogy végtelen sok olyan derékszögű háromszög van, amelyben az oldalhosszak relatív prím egész számok, és az átfogó hosszából bármelyik befogó hosszát levonva egy-egy köbszámot kapunk.

2. Az ABC háromszög szögei $\pi/7$, $2\pi/7$, $4\pi/7$. A háromszög szögfelezői a szemközti oldalakat az A_1, B_1, C_1 pontokban metszik. Mutassuk meg, hogy az $A_1B_1C_1$ háromszög egyenlő szárú.

3. Egy k élhosszúságú kocka három egy csúcsba futó lapját teljesen le akarjuk ragasztani k^2 darab 3×1 méretű címkével. Milyen k-ra lehet ezt megtenni?

Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny, 2009–2010-es tanév
MATEMATIKA, III. kategória
a gimnáziumok speciális matematikai osztályainak tanulói részére
A döntő feladatainak megoldásai

1. feladat.
Igazoljuk, hogy végtelen sok olyan derékszögű háromszög van, amelyben az oldalhosszak relatív prím egész számok, és az átfogó hosszából bármelyik befogó hosszát levonva egy-egy köbszámot kapunk.

Első megoldás: Legyen a befogók, illetve az átfogó hossza rendre a, b, illetve c. Az $a^2+b^2=c^2$ összefüggést átrendezve $b^2=(c-a)(c+a)$ adódik. Legyen pl. $c-a=1$, ez köbszám. Ekkor $b^2=2a+1$, azaz $a=(b^2-1)/2$, és így

$$c-b=\frac{b^2-1}{2}+1-b=\frac{(b-1)^2}{2}.$$

Írjuk fel $(b-1)$-et $2^k t$ alakban, ahol t páratlan. Ekkor

$$\frac{(b-1)^2}{2}=2^{2k-1}t^2$$

pontosan akkor köbszám, ha t köbszám és $3 \mid 2k-1$. Megfelel pl. $k=2$ és $t=u^3$ tetszőleges (páratlan) u-val, ekkor $b=4u^3+1$, $a=(b^2-1)/2=8u^6+4u^3$, $c=a+1=8u^6+4u^3+1$ kielégíti a feltételeket.

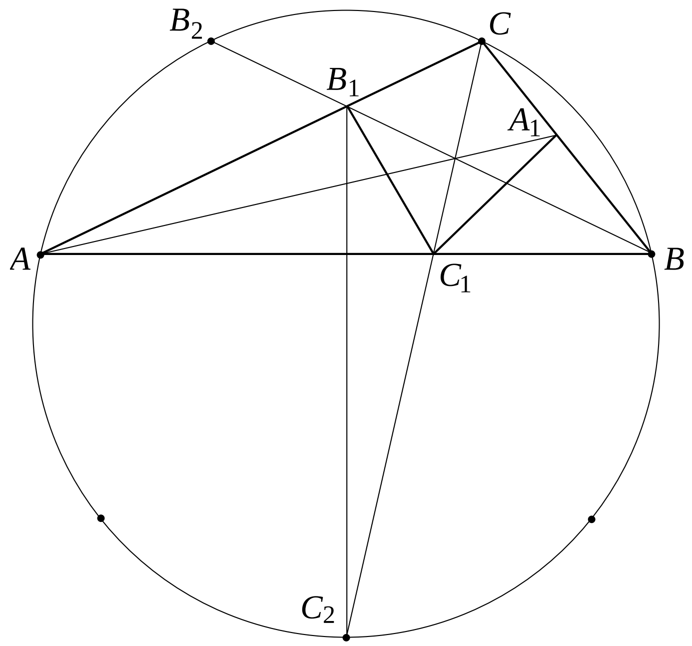
Második megoldás: Az előző megoldás jelöléseit és a pitagoraszi számhármasok alapmegoldásaira vonatkozó képletet használva legyen $a=2mn$, $b=m^2-n^2$, $c=m^2+n^2$, ahol $m>n$ különböző paritású relatív prím egészek. Ekkor $c-a=(m-n)^2$, $c-b=2n^2$, ezeknek kell köbszámoknak lenniük. Ez teljesül pl. ha $m-n=1$ és $n=2v^3$, tetszőleges v-vel. [Ekkor $a=2\cdot 2v^3(2v^3+1)=8v^6+4v^3$, $b=(2v^3+1)^2-4v^6=4v^3+1$, $c=4v^3+(2v^3+1)^2=8v^6+4v^3+1$.]

Megjegyzés: Mindkét megoldás úgy is végigvihető, ha $c-a$, illetve $m-n$ értékét nem 1-nek, hanem tetszőleges köbszámnak választjuk, csak a számolás lesz bonyolultabb.

2. feladat.
Az ABC háromszög szögei $\pi/7$, $2\pi/7$, $4\pi/7$. A háromszög szögfelezői a szemközti oldalakat az A_1, B_1, C_1 pontokban metszik. Mutassuk meg, hogy az $A_1B_1C_1$ háromszög egyenlő szárú.

Első megoldás: Az AA_1, BB_1 és CC_1 szögfelező induljon rendre a $\pi/7$, $2\pi/7$, illetve $4\pi/7$ nagyságú szög csúcsából. Bebizonyítjuk, hogy az A_1C_1B háromszög és a B_1C_1C háromszög egybevágó. Ebből $A_1C_1=B_1C_1$ következik, azaz az $A_1B_1C_1$ háromszög valóban egyenlő szárú.

Belátjuk, hogy $C_1B=C_1C$, $A_1B=B_1C$, és $A_1BC_1\sphericalangle=B_1CC_1\sphericalangle$, ez elegendő a két háromszög egybevágóságához.

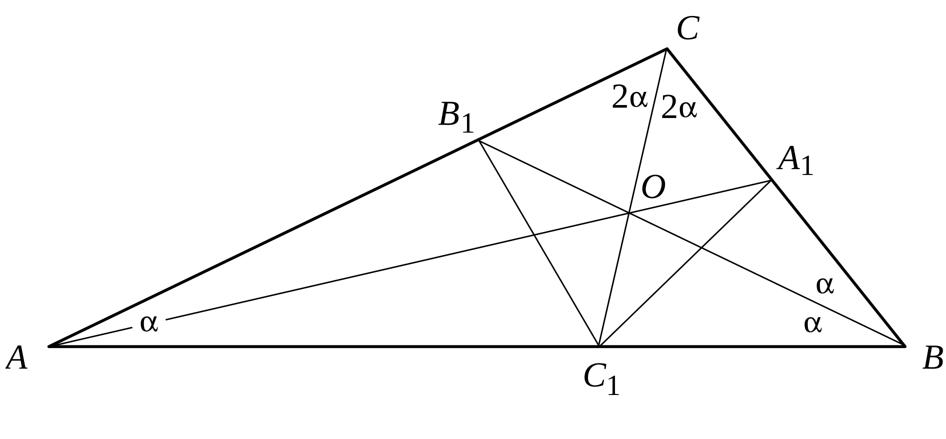


A BCC_1 háromszögben B-nél is és C-nél is $2\pi/7$ nagyságú szög van, ezért a velük szemközti oldalak is egyenlők, azaz $C_1C = C_1B$. Az A_1BC_1 szög és a B_1CC_1 szög egyenlő, hiszen mindkettő $2\pi/7$ nagyságú.

Azt kell tehát már csak megmutatnunk, hogy $A_1B = B_1C$. Tekintsük az ABC háromszög köré írt kört. A kerületi szögek tétele folytán a háromszög csúcsai egy a körülírt körbe írt szabályos hétszög csúcsai közül kerülnek ki. A B-ből és C-ből induló szögfelező egyenesek a kört a hétszög egy-egy további csúcsában, B_2-ben, illetve C_2-ben metszik. Az $ABCB_2$ húrtrapéz szimmetriatengelyére B_1 is és C_2 is illeszkedik, ezért $B_1C_2C\sphericalangle = \pi/14$.

Tekintsük végül az ABA_1 és a C_2CB_1 háromszöget. Az AB és a C_2C oldal egyenlő, hiszen mindkettő a hétszög egy-egy hosszabb átlója. Az ezen az oldalon fekvő szögek a két háromszögben szintén egyenlők, mégpedig $A_1BA\sphericalangle = B_1CC_2\sphericalangle = 2\pi/7$, és $BAA_1\sphericalangle = CC_2B_1\sphericalangle = \pi/14$. A két háromszög tehát egybevágó, ahonnan $A_1B = B_1C$ következik.

Második megoldás: Betűzzük a csúcsokat és a szögfelezőket az első megoldás szerint, legyen O a szögfelezők metszéspontja, legyen α az A-nál levő szög, ekkor B-nél 2α, C-nél 4α szög van.



A szögfelezőknek egymással és az oldalakkal alkotott szögei könnyen kifejezhetők az ábrán található háromszögek szögösszegét felhasználva:

$$\begin{aligned}
&OB_1C\sphericalangle = 2\alpha,\\
&OA_1C\sphericalangle = A_1OC\sphericalangle = \frac{5}{2}\alpha,\\
&OC_1B\sphericalangle = C_1OB\sphericalangle = 3\alpha.
\end{aligned}$$

Így az alapon fekvő szögek egyenlősége folytán a CB_1O háromszög és az OA_1C háromszög egyenlő szárú. Legyen a $B_1O = OC = CA_1$ szakaszok hossza egységnyi.

A BCO háromszög szögei $\alpha, 2\alpha$ és 4α, így a szinusztétel és a kétszeres szögekre vonatkozó összefüggés segítségével $OB = \sin 2\alpha / \sin\alpha = 2\cos\alpha$ és $BC = 4\cos\alpha\cos 2\alpha$, ahonnan $A_1B = 4\cos\alpha\cos 2\alpha - 1$ adódik.

Az OC_1B, BCC_1 és ABB_1 háromszögek is egyenlő szárúak, ezért

$$\begin{aligned}
&C_1B = OB = 2\cos\alpha,\\
&CC_1 = C_1B = 2\cos\alpha,\\
&AB_1 = B_1O + OB = 1 + 2\cos\alpha.
\end{aligned}$$

Az AC_1C háromszög szögei is α, 2α (és 4α), így a szinusztételből ott is $AC_1 = C_1C \cdot 2\cos\alpha = 4\cos^2\alpha$. Az így kapott eredményekkel az AC_1B_1 háromszögből és a BA_1C_1 háromszögből a koszinusztétel segítségével kifejezhető a B_1C_1, illetve az A_1C_1 szakasz négyzete:

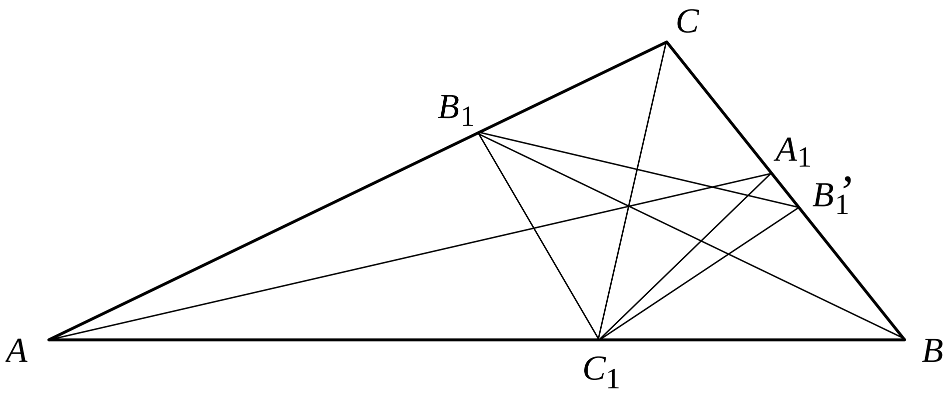
$$\begin{aligned}
B_1C_1^2 &= (2\cos\alpha + 1)^2 + (4\cos^2\alpha)^2 - 2(2\cos\alpha + 1)(4\cos^2\alpha)\cos\alpha = \\
&= 4\cos^2\alpha + 4\cos\alpha + 1 + 16\cos^4\alpha - 16\cos^4\alpha - 8\cos^3\alpha = \\
&= -8\cos^3\alpha + 4\cos^2\alpha + 4\cos\alpha + 1\,, \\
A_1C_1^2 &= (4\cos\alpha\cos 2\alpha - 1)^2 + (2\cos\alpha)^2 - 2(4\cos\alpha\cos 2\alpha - 1)(2\cos\alpha)\cos 2\alpha = \\
&= 16\cos^2\alpha\cos^2 2\alpha - 8\cos\alpha\cos 2\alpha + 1 + 4\cos^2\alpha - 16\cos^2\alpha\cos^2 2\alpha + \\
&\quad + 4\cos\alpha\cos 2\alpha = \\
&= 4\cos^2\alpha - 4\cos\alpha\cos 2\alpha + 1 = \\
&= 4\cos^2\alpha - 4\cos\alpha(2\cos^2\alpha - 1) + 1 = \\
&= -8\cos^3\alpha + 4\cos^2\alpha + 4\cos\alpha + 1\,.
\end{aligned}$$

Ugyanazt a kifejezést kaptuk, tehát $B_1C_1 = A_1C_1$.

Harmadik megoldás: Tükrözzük a B_1 pontot a CC_1 szögfelezőre, így a BC oldal $B_1{}'$ pontjához jutunk. Belátjuk, hogy A_1 és $B_1{}'$ a BC szakasz felezőpontjára szimmetrikusan helyezkedik el. Miután a BC szakasz a BCC_1 egyenlő szárú háromszög alapja, ebből már következik, hogy $C_1A_1 = C_1B_1{}' = C_1B_1$.

Azt kell belátnunk, hogy $CA_1 = B_1{}'B$, vagy ami ezzel egyenértékű, hogy

$$CA_1 + CB_1 = BC.$$



Jelöljük a-val, b-vel és c-vel a háromszög oldalait, és a szögfelezőtétel segítségével fejezzük ki a szóban forgó szakaszok hosszát:

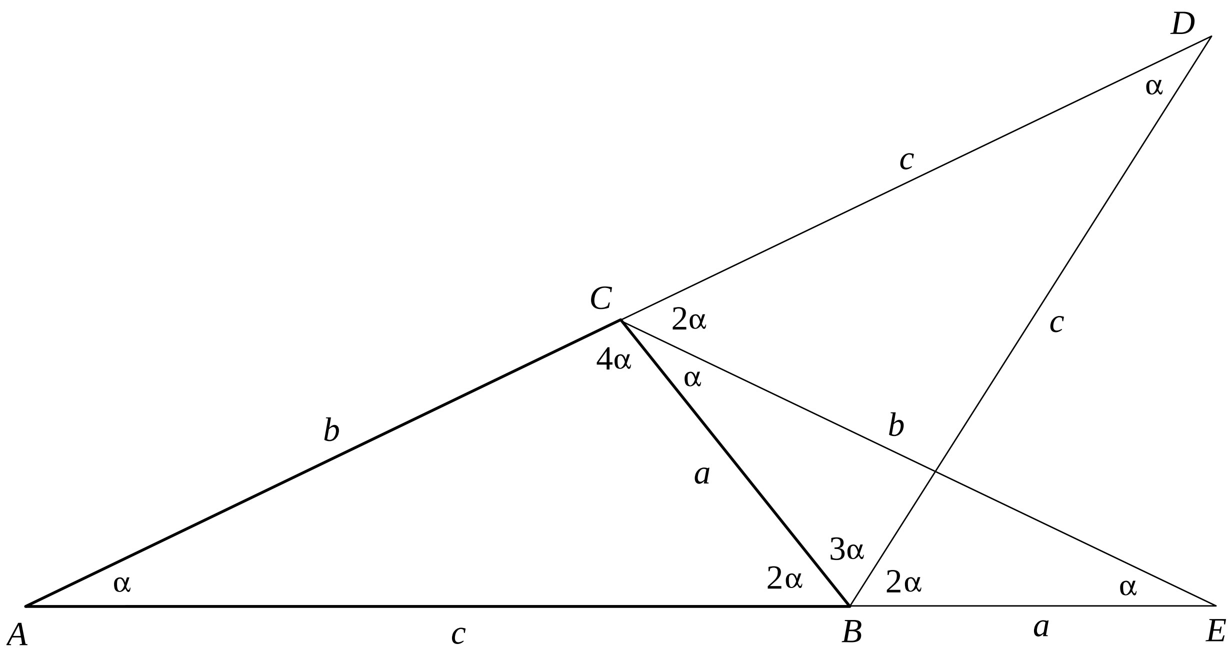
$$CA_1 = \frac{b}{b+c} \cdot a, \qquad CB_1 = \frac{a}{a+c} \cdot b.$$

Azt akarjuk tehát bebizonyítani, hogy

$$\frac{b}{b+c} \cdot a + \frac{a}{a+c} \cdot b = a,$$

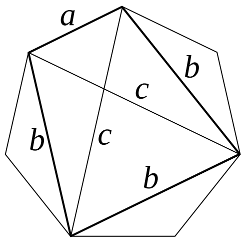
azaz átrendezve

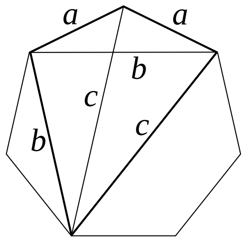
$$\frac{b}{a+c} = \frac{c}{b+c}\,. \tag{$*$}$$



Az ABC háromszög szögeit ismét α-val, 2α-val és 4α-val jelölve illesszük a BC oldalhoz az ábra szerint kifelé az egyenlő szárú CBD és ECB háromszögeket, amelyek szögei rendre 3α, 3α és α, illetve α, α és 5α. Ekkor D és E az oldalak meghosszabbításaira esnek, továbbá AEC és DAB hasonló egyenlő szárú háromszögek. A szár és az alap arányát ebben a két háromszögben felírva éppen a $(*)$ formulához jutunk.

Megjegyzés: A $(*)$ összefüggés bizonyításához felhasználhatjuk az első megoldásbeli szabályos hétszöget is. A csúcsok közül négyet alkalmasan kiválasztva olyan húrnégyszögekhez jutunk, amelynek oldalai és átlói is a, b, vagy c hosszúságúak:





Ezekre a húrnégyszögekre Ptolemaiosz tételét alkalmazva az $ab+b^2=c^2$, illetve az $ab+ac=bc$ összefüggéseket kapjuk. Ezek egybevetésével átrendezés után a $(*)$ formula adódik.

3. feladat.
Egy k élhosszúságú kocka három egy csúcsba futó lapját teljesen le akarjuk ragasztani k^2 darab 3×1 méretű címkével. Milyen k-ra lehet ezt megtenni?

Megoldás: A három négyzetlap mindegyikét osszuk fel a $k\times k$ méretű négyzetráccsal. A címkék összterülete egyenlő a lefedendő területtel. Ezért ha a leragasztás lehetséges, akkor a címkék között nem keletkezhet átfedés, és a szélső címkéknek illeszkedniük kell a lefedendő terület határához. Így a sarkok felől befelé haladva látható, hogy mindegyik címkének a négyzetfelosztáshoz kell illeszkednie.

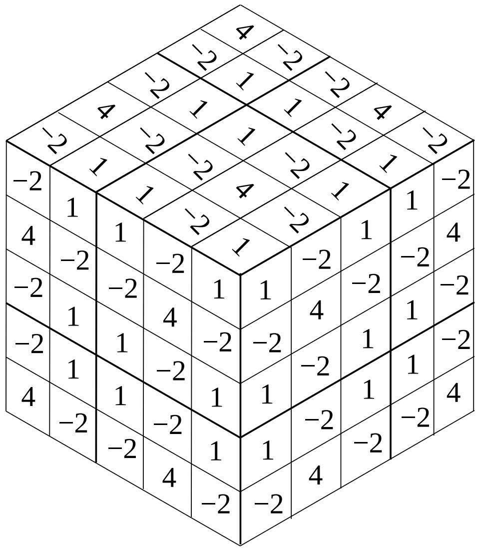
Ha k osztható 3-mal, akkor a lefedés kézenfekvő módon megvalósítható. Bebizonyítjuk, hogy 3-mal nem osztható k-ra ez lehetetlen.

Írjunk számokat egy 3×3-as négyzet kilenc mezőjébe az ábrán látható módon:

1	−2	1
−2	4	−2
1	−2	1

Bármelyik sorban és bármelyik oszlopban a számok összege 0. Sőt, a táblázatnak ez a tulajdonsága „folytatólagosan” is érvényben van, azaz ha a síkbeli négyzetrácsot ilyen 3×3-as négyzetekkel töltjük ki, akkor bármelyik – akár vízszintes, akár függőleges – 3×1-es rácstéglalapban 0 a számok összege.

A kocka három lapján levő $3k^2$ mezőbe írjuk a fenti számokat olyan módon, hogy mindhárom lapon a közös csúcstól kezdjük a 3×3-as táblázatok elhelyezését. (Ha k nem



osztható 3-mal, akkor a szélső táblázatok „lelógnak”, és ezeknek csak egy részét használjuk föl.) Az ábra a $k = 5$ esetet mutatja.

Ha egy 3×1 méretű címkével lefedünk három mezőt a kocka három lapjából, akkor e három mezőben a számok összege 0 (akkor is, ha a címke átnyúlik az egyik lapról a másikra). Ezért ha a három lapot teljesen leragasztottuk ilyen címkékkel, akkor az összes felhasznált szám összegének 0-nak kell lennie. Könnyen látható viszont, hogy a számok összege csak akkor 0, ha k osztható 3-mal. Ha ugyanis $k = 3t + 1$, akkor egy lapon a közös csúcstól számított $(3t) \times (3t)$ méretű négyzetben, valamint mellette a kétszer t darab 3×1-es részen 0 az összeg, és csak a közös csúcstól legtávolabbi mező marad ki, ahova 1-est írtunk, így a három lapon az összeg 3. Hasonlóan, ha $k = 3t + 2$, akkor egy 2×2-es négyzet marad ki, amelynek elemei $1, -2, -2, 4$, ezek összege itt is 1, vagyis a három lapon a teljes összeg most is 3.

Megjegyzések: (1) Ha a lapok közös csúcsában találkozó három mezőbe 1-est írunk, és a három lap mezőit úgy akarjuk számokkal kitölteni, hogy bármely címke alatt 0 legyen az összeg, akkor a kitöltést szomszédról szomszédra haladva egyértelműen lehet folytatni, azaz csak a fent leírt módon helyezhetjük el a számokat.

(2) Észrevehetjük, hogy a mezőkbe írt számoknak csak a paritása lényeges a feladat szempontjából. Színezzük feketére azokat a mezőket, ahol 1-es áll, a többit hagyjuk fehéren. Ekkor bármelyik címke vagy 0, vagy 2 fekete mezőt takar le, ezért ha sikerült a címkékkel a három lapot lefedni, akkor összesen páros sok fekete mezőnek kellett szerepelnie. A fekete mezők száma pedig pontosan akkor páros, ha k osztható 3-mal.