Az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
2010-2011. tanévi első fordulójának feladatmegoldásai
matematikából, a II. kategória számára

1. Határozzuk meg az $f(x)$ függvény legkisebb és legnagyobb értékét, ha $-4 \leq x \leq 4$ és

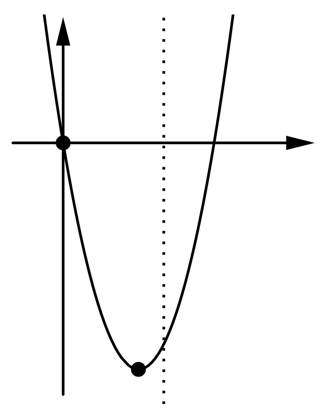
$$f(x) = 16 - x^2 - 6\sqrt{16 - x^2}.$$

Megoldás: Legyen $z = \sqrt{16 - x^2}$. $-4 \leq x \leq 4$, akkor és csak akkor, ha $0 \leq z \leq 4$.
2 pont

A függvény így írható fel:

$$16 - x^2 - 6\sqrt{16 - x^2} = z^2 - 6z = (z - 3)^2 - 9 \qquad \text{2 pont}$$

Ez a z-ben másodfokú függvény a $z = 3$ esetén lesz minimális, itt értéke -9. Mivel $z = 3$ megfelel a $0 \leq z \leq 4$ feltételnek, így a függvény legkisebb értéke a -9, és ezt az értéket az $x = \pm\sqrt{7}$ helyeken veszi fel. 1 pont



A $(z - 3)^2 - 9$ másodfokú függvény képe parabola, legnagyobb értékét a $0 \leq z \leq 4$ intervallumon $z = 0$ esetén veszi fel, ekkor értéke 0. A függvény legnagyobb értéke tehát a 0, amit az $x = \pm 4$ helyeken kapunk. 2 pont

Összesen: 7 pont

2. Keressük meg mindazon pozitív egész a és b számokat, amelyekre az alábbi négy állítás közül három igaz, egy pedig hamis:

i) $a+1$ osztható b-vel;
ii) $a=2b+5$;
iii) $a+b$ osztható 3-mal;
iv) $a+7b$ prímszám.

Megoldás: Nem lehet egyszerre igaz iii) és iv). Ugyanis ha $a+b$ osztható 3-mal, akkor $a+7b=a+b+6b$ is osztható 3-mal. Így $a+7b$ csak akkor lehetne prím, ha 3 lenne, de a és b pozitív egészek, $a+7b>3$. 2 pont

Ezek szerint i) és ii) mindkettő igaz. $a+1=2b+5+1=2b+6$ osztható b-vel, ezért 6 osztható b-vel. Ezek szerint b értéke 1, 2, 3 vagy 6 lehet. 2 pont

$a+b=2b+5+b=3b+5$, ez nem osztható 3-mal, tehát iii) lesz a hamis. Most már csak arra kell figyelni, hogy iv) igaz legyen. 1 pont

Ha $b=1$, akkor ii) szerint $a=7$, $a+7b=14$ miatt iv) hamis, ez nem jó megoldás.
Ha $b=2$, akkor ii) szerint $a=9$, $a+7b=23$ miatt iv) igaz, ez jó megoldás.
Ha $b=3$, akkor ii) szerint $a=11$, $a+7b=32$ miatt iv) hamis, ez nem jó megoldás.
Ha $b=6$, akkor ii) szerint $a=17$, $a+7b=59$ miatt iv) igaz, ez jó megoldás.
A megfelelő $(a;b)$ megoldáspárok tehát: (9;2) és (17;6). 2 pont

Összesen: 7 pont

3. Oldjuk meg a természetes számok körében:

$$3^{2x-1}=x^{9-2x}-5.$$

Megoldás: Használjuk ki, hogy $3^{2x-1}>0$. 1 pont

Ezek szerint $x^{9-2x}-5>0$, azaz

$$x^{9-2x}>5 \qquad \text{2 pont}$$

Ebből következik, hogy $x>1$ és így $9-2x>0$. Ebből

$$x<\frac{9}{2}. \qquad \text{2 pont}$$

Azt kaptuk, hogy $1<x<\frac{9}{2}$, azaz x értéke 2, 3, vagy 4 lehet. Behelyettesítve kiderül, csak az $x=2$ megfelelő. Az egyenlet egyetlen megoldása a természetes számok körében a 2.

2 pont

Összesen: 7 pont

4. Adott a síkon egy O pont és a belőle induló két félegyenes, melyek hegyesszöget zárnak be. A sík egy P pontjának a félegyenesekre eső merőleges vetületei a félegyenesek belsejébe eső P_1 és P_2 pontok. Határozzuk meg azon P pontok halmazát (mértani helyét), amelyekre P_1P_2 szakasz hossza állandó.

Megoldás: Először azt vizsgáljuk, hol lehet a P pont. Az ábra jelöléseit használjuk, jelölje az adott szakasz hosszát h. Az OP szakasz Thalesz körén rajta van P_1 és P_2, ezek szerint ez a négy pont egy körön van. Ha P a szárak egyikén van, akkor vetülete önmaga. Ilyenkor három pontunk van OP Thalesz körén. 1 pont

A kör átmérője OP. 1 pont

A P_1P_2 ívhez tartozó kerületi szög $P_1OP_2\angle = \alpha$ rögzített. 1 pont

Az átmérő, a kerületi szög és a húr hossza között fennáll

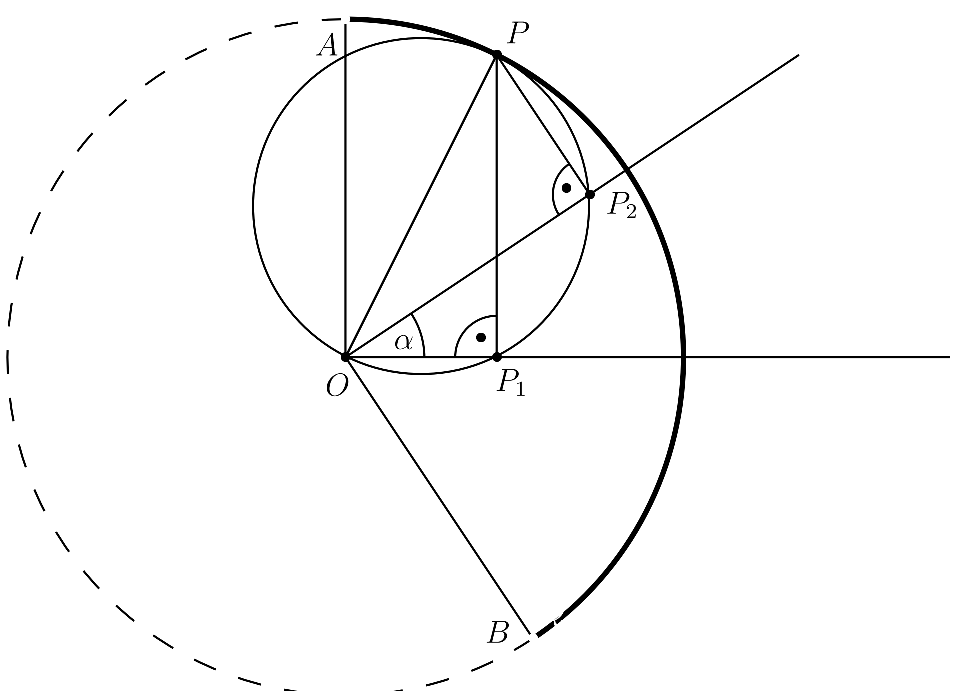
$$OP = \frac{P_1P_2}{\sin\alpha}$$

Így P az O középpontú $\frac{P_1P_2}{\sin\alpha} = \frac{h}{\sin\alpha}$ sugarú körön van. 1 pont

E körvonalnak csak azon pontjai felelnek meg, amelyek merőleges vetületei a félegyenesek belső pontjai. Állítsunk merőlegest O-ban az egyik adott félegyenesre, ez két részre osztja a síkot. P csak annak a félsíknak belsejében lehet, amely tartalmazza a félegyenest. Ugyanez igaz a másikra is. Így a megfelelő P pontok csak az ábrán látható AB íven lehetnek, az ív A, B végpontjai nélkül. 1 pont

Azt is meg kell gondolnunk, hogy ennek az ívnek minden pontja – kivéve a végpontok – hozzátartozik a mértani helyhez. Mivel az ív minden belső P pontjának a félegyenesekre eső vetülete a félegyenesek belső pontja, ezért létrejön az OPP_1P_2 húrnégyszög, vagy pl $P = P_1$ esetben egy OP átfogójú derékszögű háromszög. Akár húrnégyszög, akár derékszögű háromszög, a köréírt körének OP átmérője, így $P_1P_2 = OP \cdot \sin\alpha = h$.

2 pont



Összesen: 7 pont

5. Egy urnában 3 piros, 4 fehér és 5 zöld golyó van. Visszatevés nélkül kivesszük egyesével mindet. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább két fehéret húzunk egymás után?

Megoldás: Legyenek az elemi események a különböző sorrendek. Ezek egyenrangúak, ezért a klasszikus modell alapján a valószínűséget a jó esetek számának és az összes eset számának hányadosa adja. Az összes eset, azaz a lehetséges húzások száma (ismétléses permutáció):

$$\frac{12!}{3! \cdot 4! \cdot 5!}$$ 2 pont

Számoljuk meg, hány esetben nem lesz egymás mellett két fehér. Csak a pirosakat és a zöldeket tekintve ezek sorrendjeinek száma:

$$\frac{8!}{3! \cdot 5!}$$ 1 pont

Fehér golyó húzás lehet előttük, valamely kettő között, vagy utánuk. Ábránkon a körök jelzik a nem fehér golyókat, a pontok jelzik azokat a helyeket, ahova egyesével kerülhet a négy fehér.

$$\bullet \quad \circ \quad \bullet \quad \circ \quad \bullet \quad \circ \quad \bullet \quad \circ \quad \bullet \quad \circ \quad \bullet \quad \circ \quad \bullet \quad \circ \quad \bullet \quad \circ \quad \bullet$$

A 8 darab nem fehér golyó így meghatároz 9 helyet, ezek közül kell kiválasztani négyet, ahova a fehérek kerülnek. Ezek száma $\binom{9}{4}$. 1 pont

A nem fehér golyók tetszőleges elrendezése esetén mindig $\binom{9}{4}$ módon helyezhetők el a fehérek, ezért azon esetek száma, amikor nincs egymás mellett két fehér

$$\frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot \binom{9}{4}$$ 1 pont

A komplementer esemény segítségével számolva a keresett valószínűség:

$$\frac{\frac{12!}{3! \cdot 4! \cdot 5!} - \frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot \binom{9}{4}}{\frac{12!}{3! \cdot 4! \cdot 5!}} = \frac{41}{55}.$$ 2 pont

Ha a versenyző tizedestört alakban adja meg a megoldást és kerekít, akkor például a 0.745 vagy a 74.5% alakban adott válasz is elfogadható.

Összesen: 7 pont.