Az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
2010-2011. tanévi harmadik, döntő fordulójának feladatmegoldásai
matematikából, a II. kategória számára

1. Legyen $f_1(x) = -\dfrac{2x+7}{x+3}$ és $f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x))$, ha $x \neq -3$ és $x \neq -2$. Határozzuk meg $f_{2010}(2011)$ értékét.

Megoldás: Meghatározzuk az $f_2(x)$ és $f_3(x)$ függvényeket.

$$f_2(x) = f_1(f_1(x)) = -\frac{2f_1(x)+7}{f_1(x)+3} = -\frac{-2\frac{2x+7}{x+3}+7}{-\frac{2x+7}{x+3}+3} = -\frac{3x+7}{x+2},$$

$$f_3(x) = f_1(f_2(x)) = -\frac{2f_2(x)+7}{f_2(x)+3} = -\frac{-2\frac{3x+7}{x+2}+7}{-\frac{3x+7}{x+2}+3} = x.$$

3 pont

Teljes indukcióval bebizonyítjuk, hogy ha n 3-nak többese, akkor $f_n(x) = x$. Az indukció kezdő lépéseként már beláttuk, hogy $f_3(x) = x$. Az indukciós lépésben feltesszük, hogy valamely pozitív egész k-ra $f_{3k}(x) = x$ és ennek segítségével megmutatjuk, hogy $f_{3k+3}(x) = x$.

$$f_{3k+1}(x) = f_1(f_{3k}(x)) = f_1(x); \quad f_{3k+2} = f_1(f_{3k+1}(x)) = f_1(f_1(x) = f_2(x);$$

$$f_{3k+3}(x) = f_1(f_{3k+2}(x)) = f_1(f_2(x)) = f_3(x) = x.$$

Mivel a 2010 3-nak többese, ezért $f_{2010}(x) = x$, tehát $f_{2010}(2011) = 2011$. 4 pont

Összesen: 7 pont

2. Jelölje az $\{1, 2, ..., n\}$ halmaz azon részhalmazainak számát r_n, amely nem tartalmaz szomszédos számokat, ahol az 1-et és az n-et is szomszédosnak tekintjük. Határozzuk meg r_{16} értékét. Igazoljuk, hogy az $\{r_n\}$ sorozat hármas maradékai periódikusan ismétlődnek, ha $n \geq 2$ és határozzuk meg a sorozat periódusát.

Megoldás: Kétféleképpen is meghatározzuk r_n értékét. Először explicit képletet készítünk (i), majd rekurzív összefüggéssel (ii) adjuk meg.

(i) A részhalmazban szereplő számok legyenek pirosak, a többi kék. Legyen a piros számok száma k. Ekkor két esetet különböztetünk meg. Ha az 1 piros, akkor a 2 és az n biztosan kék. Az $n-k$ darab kék szám esetén ki kell választanunk $k-1$ darab különböző egymást követő kéket, amelyek közé egyesével helyezhetjük a többi piros számot. Az ilyen „közök” száma $n-k-1$. Az esetek száma tehát $\binom{n-k-1}{k-1}$. Ha az 1 kék, akkor a további $n-k-1$ darab kék elejére, végére és $n-k-1$ darab közébe is helyezhető a k darab piros, ezek száma tehát $\binom{n-k}{k}$. k legkisebb lehetséges értéke a 0, legnagyobb értékére pedig teljesül a $2k \leq n$, különben lenne két piros szomszédos. A részhalmazok számát tehát a következő összeggel adhatjuk meg:

$$r_n = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \left(\binom{n-k-1}{k-1} + \binom{n-k}{k} \right).$$

A képlet alapján kiszámolva $r_{16} = 2207$. 4 pont

(ii) A feladat feltételének eleget tevő részhalmazt a továbbiakban megfelelőnek nevezzük. Legyen n pozitív egész, vizsgáljuk a megfelelő részhalmazok r_n számát, ha a kiindulási halmazunkban n szám van. $r_1 = 2$, mivel az üres halmaz és az egy elemű halmaz is megfelelő. $r_2 = 3$, mivel az üres halmaz és a két egy elemű halmaz megfelelő. $r_3 = 4$, mivel az üres halmaz és a három egy elemű halmaz megfelelő. Ha a kiindulási halmazunk az $\{1,2,3,4\}$, akkor a megfelelő halmazok az üres halmaz, a négy darab egy elemű és az $\{1,3\}$, $\{2,4\}$ halmazok, azaz $r_4 = 7$. Az eddigiekhez hasonló módon megszámolgatva adódó további értékek: $r_5 = 11$, $r_6 = 18$.

Ezek alapján azt sejtjük, hogy $n \geq 2$ esetén $r_{n+2} = r_{n+1} + r_n$, ami $n = 2$ esetén igaz. Az n elemű halmaz összes megfelelő részhalmazát jelölje R_n. R_{n+2}-ben sorra vesszük a megfelelő részhalmazokat.

(a) Ha $n+2$ nem elem és az 1 vagy az $n+1$ sem, akkor ezek éppen R_{n+1}-et adják.

(b) Az $n+2$-t nem tartalmazó részhalmazok közül megmaradtak azok, amelyek az 1-et és az $n+1$-et is tartalmazzák, tehát az n-et nem tartalmazzák. Az ilyen részhalmazokból $n+1$-et elhagyva megkapjuk az R_n-beli összes olyan részhalmazt, amelyben az 1 elem.

(c) Végül megmaradtak az $n+2$-t tartalmazó részhalmazok. Ezekben az 1 és az $n+1$ nem elem, elhagyva belőlük $n+1$-et megkapjuk az R_n-beli összes olyan részhalmazt, amelyben az 1 nem elem.

Összefoglalva: r_{n+2} értékét megkapjuk ha az (a) esetből adódó r_{n+1} , továbbá a (b) és (c) esetekből adódó r_n értékeket összeadjuk. A kapott rekurzió alapján sorra kiszámolhatjuk r_n értékeit, amíg megkapjuk a feladat kérdésére a választ: $r_{16} = 2207$.

n :	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
r_n :	7	11	18	29	47	76	123	199	322	521	843	1364	2207

4 pont

A sorozatot meghatározó rekurzió két szomszédos elem segítségével állítja elő a sorozat következő tagját. Ezek szerint ha találunk a sorozatban két-két egymás után következő $r_i; r_{i+1}$ és $r_{i+p}; r_{i+p+1}$ tagot (i és p pozitív egészek), amelyeknek a hármas maradéka megegyezik, akkor a sorozat p szerint periódikus. Ha $n \geq 2$ a sorozat tagjainak 3-as maradékai sorban: 0,1,1,2,0,2,2,1,0,1. Megtaláltuk az első szomszédpárt, ami ismétlődik, a periódus hossza tehát 8. 3 pont

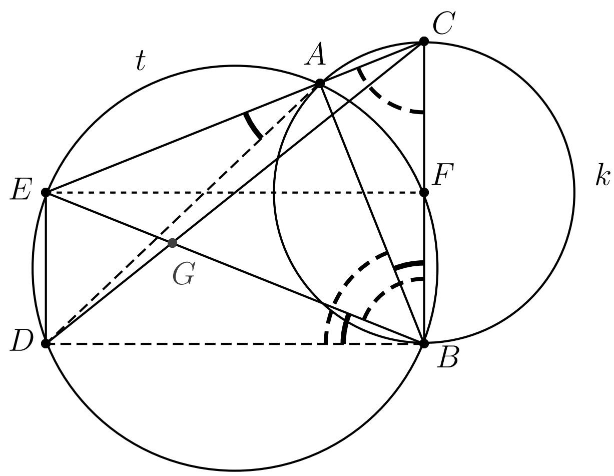
Összesen: 7 pont

3. Az ABC háromszög köré írt körhöz A-ban és B-ben húzott érintők metszéspontja legyen D. Az ABD háromszög köré írt köre az AC egyenest és a BC szakaszt másodszor rendre az E és F pontokban metszi. Legyen CD és BE metszéspontja G.

Határozzuk meg a $BG : GE$ arányt, ha $BC : BF = 2 : 1$.

Megoldás: Jelölje az ABC háromszög köré írt k kör középpontját O. $OADB$ húrnégyszög, hiszen az AD és BD érintők merőlegesek az OA és OB sugarakra, így OD Thalesz körén –jelölje t– rajta van A és B. Mivel O a k kör közepe, ezért a B középpontú kétszeres nagyítás után O képe, O' k-ra kerül. Másrészt a feladatban szereplő feltétel szerint F a t kör oly pontja, hogy a B középpontú kétszeres nagyítás k-ra viszi, mégpedig éppen C-be. Amennyiben B-ből a t kört kétszeresére nagyítjuk, a kép egy t' kör lesz, ami átmegy B-n és O'-n. mivel k-nak és t'-nek csak két közös pontja lehet, ezért $F = O$ és $O' = C$. Azt kaptuk, hogy BC a k kör átmérője, és F a k kör középpontja és így $BAC\angle = 90°$.

4 pont



Az $AEDB$ húrnégyszögben ezek szerint $EAB\angle = 90°$ és e miatt $EDB\angle = 90°$. A DB egyenesre tehát ED és BC is merőleges. A k kör AC húrjához tartozó kerületi és érintő szárú kerületi szögek egyenlők, azaz $ABC\angle = EAD\angle$. A t kör ED húrjához tartozó kerületi szögek egyenlők, azaz $EAD\angle = EBD\angle$. Azt kaptuk, hogy $ABC\angle = EBD\angle$, amiből következik, hogy $EBC\angle = DBA\angle$. Másrészt a k kör AB húrjához tartozó kerületi és érintő szárú kerületi szögek egyenlők, azaz $DBA\angle = ACB\angle$. Ezek szerint $EBC\angle = ACB\angle$, az EBC háromszög egyenlő szárú, melynek EF a szimmetria tengelye. Így EF merőleges BC-re, tehát $EFBD$ egy téglalap és így $ED = BF = \frac{1}{2}BC$.

BC és ED párhuzamosak, $BC : ED = 2 : 1$, BE és CD metszéspontja G, tehát a párhuzamos szelőszakaszok tétele szerint $BG : GE = 2 : 1$.

3 pont

Összesen: 7 pont