Oktatási Hivatal

Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny 2010–2011-es tanév

MATEMATIKA, III. kategória

Az első (iskolai) forduló feladatai

a gimnáziumok speciális matematikai osztályainak tanulói részére

1. Egy 2010×2010-es táblázat mezőibe úgy akarunk (nem feltétlenül különböző) egész számokat beírni, hogy minden sorban és minden oszlopban a számok összege különböző legyen (azaz 4020 különböző összeget kapjunk). Legkevesebb hányféle szám beírásával tudjuk ezt elérni?

2. Legyen $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < 1$. Igazolja, hogy

$$x_1(1-x_1)+(x_2-x_1)(1-x_2)+(x_3-x_2)(1-x_3)+\ldots$$
$$\ldots+(x_n-x_{n-1})(1-x_n)<\frac{1}{2}\,.$$

3. Keresse meg az összes olyan p prímszámot, melyhez léteznek olyan a, b, c egész számok, hogy $a^2+b^2+c^2=p$ és $(a^4+b^4+c^4)$ osztható p-vel.

4. Egy n-elemű H halmaznak kiválasztottuk néhány k-elemű részhalmazát $(3 \leq k \leq n)$ úgy, hogy H bármely két elemét pontosan három darab, bármely három elemét pontosan két darab kiválasztott részhalmaz tartalmazza. Határozza meg n és k lehetséges értékeit.

5. (a) Tükrözzük az ABC háromszög A csúcsát B-re, B-t C-re és C-t A-ra. Igaz-e, hogy ha a tükörképek alkotta háromszög szabályos, akkor az eredeti háromszög is szabályos?

   (b) Tükrözzük az $ABCD$ tetraéder A csúcsát B-re, B-t C-re, C-t D-re és D-t A-ra. Igaz-e, hogy ha a tükörképek alkotta tetraéder szabályos, akkor az eredeti tetraéder is szabályos?

Valamennyi feladat 7 pontot ér.