Az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
2011-2012. tanévi első fordulójának feladatmegoldásai
matematikából, a II. kategória számára

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$(2x^2-x-3)^4+(2x^2-x-3)^2(2x^2+x-6)^2+(2x^2+x-6)^4=0$$

Megoldás: Az egyenlet bal oldalán álló összeg minden tagja páros hatványon van, tehát nem negatív. Így a bal oldal értéke pontosan akkor 0, ha minden tagja 0. 2 pont

Az első tag pontosan akkor 0, ha $2x^2-x-3=0$, ennek megoldásai $x_1=1.5$ és $x_2=-1$. Az egyenlet gyöke csak ezen két szám lehet. 2 pont

A második tag x_1 és x_2 helyettesítése esetén is 0. 1 pont

A harmadik tag $2x^2+x-6$, $x_1=1.5$-et helyettesítve 0-t kapunk, $x_2=-1$-et helyettesítve viszont nem 0-t.

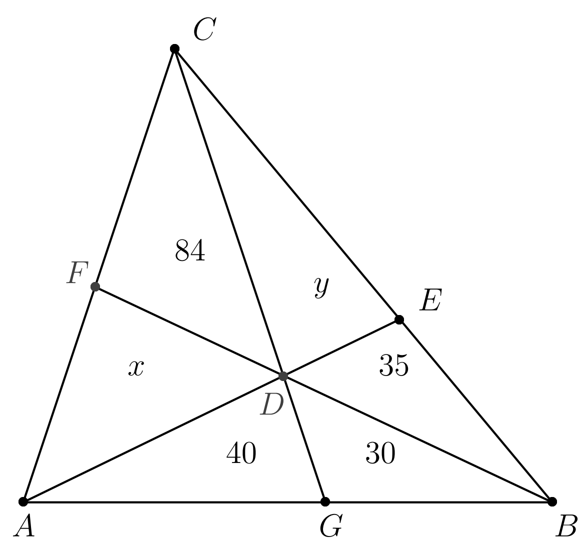
Így az egyenlet egyetlen megoldása az 1.5. 2 pont

Összesen: 7 pont

2. Az ABC háromszög belső D pontján áthaladó AD, BD és CD egyenesek a szemközti oldalakat rendre az E, F, G pontokban metszik. A következő területek mérőszámait ismerjük: $T_{ADG}=40$, $T_{BDG}=30$, $T_{BDE}=35$, $T_{CDF}=84$.

Mekkora az ABC háromszög területe?

Megoldás: Jelölje az AFD háromszög területét x, az EDC háromszög területét y. Az ADG és BDG háromszögek D hez tartozó magassága közös, ezért területük aránya az AG és GB alapok arányával egyezik meg. 1 pont



Az ACG és BCG háromszögek C-hez tartozó magassága közös, területének aránya az AG és GB alapok aránya. Ezeket összevetve:

$$\frac{T_{ADG}}{T_{BDG}} = \frac{AG}{GB} = \frac{T_{ACG}}{T_{BCG}} \quad \text{azaz} \quad \frac{124+x}{65+y} = \frac{4}{3} \qquad 1 \text{ pont}$$

Hasonló módon az AF és FC alapokra illeszkedő háromszögek esetén:

$$\frac{T_{ADF}}{T_{CDF}} = \frac{AF}{FC} = \frac{T_{ABF}}{T_{CBF}} \quad \text{azaz} \quad \frac{x}{84} = \frac{70+x}{119+y} \qquad 2 \text{ pont}$$

A kapott két egyenlet által meghatározott egyenletrendszer pozitív megoldásai az $x = 56$ és $y = 70$ értékek. 2 pont

A háromszög területe 315. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. Egy szabályos dobókockát egymás után háromszor feldobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a három dobott szám szorzata 10-zel osztható?

Megoldás: A kísérlet során $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ egyformán valószínű elemi eseményt különböztetünk meg, ezért alkalmazhatjuk a valószínűség meghatározására a klasszikus modellt. A keresett valószínűség a kedvező és az összes eset számának hányadosa. 1 pont

A kockával hatfélét dobhatunk, az összes eset száma három dobás esetén $6^3 = 216$. 1 pont

A kedvező esetek azok, amikor a dobott számok között van 5-ös és van páros szám is. Ezek megszámlálására két utat adunk meg.

1. Logikai szita módszerével dolgozunk. 1 pont

Az összes esetből levonjuk azokat, amikor nincs 5-ös. Ezek száma 5^3, hiszen az 5-ös kivételével bármit dobhatunk. 1 pont

Ezt követően levonjuk, amikor nincs páros, ezek száma 3^3, csak 1, 3, 5 lehet a dobás. 1 pont

Végül hozzáadjuk a kétszer levont eseteket, amikor 5-ös sincs és páros sincs, ezek száma 2^3, csak 1, 3 lehet a dobás. Így a kedvező esetek száma $6^3 - 5^3 - 3^3 + 2^3 = 72$. 2 pont

2. Az 5-ösök száma szerint sorra vesszük az eseteket. Ha két 5-ös van és egy páros szám, akkor a páros lehet 2,4,6 és a páros dobás lehet a három dobás bármelyike. Ez $3 \cdot 3 = 9$ eset. 1 pont

Ha egy 5-ös van és két páros, akkor az 5 lehet a három dobás bármelyike, a páros számok pedig a 2,4,6. Ezek száma $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$. 1 pont

Az utolsó eset, amikor egy darab 5-ös van, egy páros, egy pedig az 1 és 3 valamelyike. A páros szám három féle lehet, az 5-től különböző páratlan kettő féle. A három számnak 3! sorrendje lehet. Így az esetek száma $3 \cdot 2 \cdot 3! = 36$. 2 pont

Összeadva 72 eset. 1 pont

A keresett valószínűség $\frac{72}{6^3} = \frac{1}{3}$.

Összesen: 7 pont

4. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\frac{\sqrt{x^2+8x}}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+7}=\frac{7}{\sqrt{x+1}}$$

Megoldás: Gyökjel alatt nem állhat negatív szám. A három különböző gyökjel alatti kifejezés: $x^2+8x\geq 0$, amiből $x\leq -8$ vagy $0\leq x$; $x+1\geq 0$, amiből $x\geq -1$; $x+7\geq 0$, amiből $x\geq -7$. Mindezeket összevetve azon valós számok között értelmezett az egyenlet, amelyekre $x\geq 0$. 2 pont

Az imént megállapított értelmezési tartományban x nem negatív, a törtek nevezője nem lehet 0. 1 pont

Beszorzunk $\sqrt{x+1}$-gyel:

$$\sqrt{x^2+8}+\sqrt{x^2+8x+7}=7$$

Helyettesítünk $x^2+8x=u$-t: 1 pont

(1) $$\sqrt{u}+\sqrt{u+7}=7$$

(2) $$\sqrt{u+7}=7-\sqrt{u}$$

Négyzetre emelünk

$$u+7=49-14\sqrt{u}+u$$

Ebből $\sqrt{u}=3$, $u=9$. 1 pont

Visszatérve az eredeti változóra $9=x^2+8x$, ennek gyökei az 1 és a -9, de ez utóbbi nincs az értelmezési tartományban. 1 pont

A (2) után következő négyzetre emelés nem ekvivalens lépés, ezért a kapott gyököt ellenőrizni kell. Az $x=1$ valóban jó megoldás. 1 pont

Az egyenletnek egyetlen valós gyöke van, az $x=1$.

Összesen: 7 pont

Az (1) egyenlet két további megoldása:

1. A bal oldal az u változó szigorúan monoton növő függvénye, a jobb oldal konstans, így egyetlen megoldás lehet. Az $u=9$ jó megoldás.

2. Az (1) egyenlet mindkét oldalát beszorozzuk a biztosan pozitív $\sqrt{u+7}-\sqrt{u}$-val, ebből $u+7-u=7(\sqrt{u+7}-\sqrt{u})$, azaz $\sqrt{u+7}-\sqrt{u}=1$. A kapott egyenletből és (1)-ből kapjuk, hogy $\sqrt{u+7}=4$, amiből $u=9$.

5. Adott a síkon három pont A, B és C, melyek nincsenek egy egyenesen. Felveszünk a pontok síkjában egy e egyenest. Ha a P pont az e egyenesen van, vizsgáljuk az

$$L=PA^2-PB^2+\lambda PC^2$$

kifejezés értékét, ahol $\lambda\neq 0$. Úgy szeretnénk λ értékét megválasztani, hogy L éppen akkor legyen minimális, amikor P az ABC háromszög súlypontjának az e egyenesre eső merőleges vetülete.

Az e egyenes tetszőleges helyzetében megválasztható-e a kívánt módon λ értéke?

1. Megoldás: A feltett kérdésre **NEM** a válasz. Ha például e az AB felező merőleges egyenese, akkor $PA = PB$, ezért $PA^2 - PB^2 = 0$. 3 pont

Ekkor $L = \lambda PC^2$-nek akkor lehet minimuma, ha $\lambda > 0$. Tetszőlegesen választott pozitív λ esetén L akkor minimális, ha PC minimális, azaz P a C pont merőleges vetülete e-re. 2 pont

Ez pedig különbözik a háromszög súlypontjának merőleges vetületétől. 2 pont

Összesen: 7 pont

2. Megoldás: Legyenek az A, B, C pontok merőleges vetületei az e egyenesen A_1, B_1, C_1. Ekkor Pitagorasz tételét felhasználva (elfajuló háromszög is lehet pl. a PAA_1)

$$L = PA^2 - PB^2 + \lambda PC^2 = (PA_1^2 + AA_1^2) - (PB_1^2 + BB_1^2) + \lambda(PC_1^2 + CC_1^2)$$

Mivel az AA_1, BB_1 és CC_1 szakaszok hossza P helyzetétől nem függ, ezért L akkor minimális, amikor $L' = PA_1^2 - PB_1^2 + \lambda PC_1^2$ minimális. 1 pont

Helyezzünk az e egyenesre egy számegyenest, legyen A_1 az a-ban, B_1 a b-ben, C_1 a c-ben, P pedig x-ben. Ekkor

$$L' = (x-a)^2 - (x-b)^2 + \lambda(x-c)^2 = \lambda x^2 - 2(a-b+\lambda c)x + a^2 - b^2 + \lambda c^2 \quad 1 \text{ pont}$$

L' egy másodfokú kifejezése x-nek. Ha $\lambda < 0$ akkor x^2 együtthatója negatív, ekkor L'-nek maximuma van, minimuma nincs. Ha $\lambda > 0$, akkor L' minimum helye $(a - b + \lambda c)/\lambda$. 1 pont

A háromszög súlypontjának e-re eső merőleges vetülete az $(a + b + c)/3$. 1 pont

Szeretnénk λ-t úgy megválasztani, hogy teljesüljön:

$$\frac{a - b + \lambda c}{\lambda} = \frac{a + b + c}{3}$$

Ezt rendezve

$$3a - 3b = \lambda(a + b - 2c) \tag{1}$$

adódik. Ha $a + b - 2c \neq 0$, akkor $\lambda = (3a - 3b)/(a + b - 2c)$ választással célunkat elérjük, amennyiben a kapott λ érték pozitív. 1 pont

Van olyan e egyenes, amikor nem érhető el, hogy L minimuma a háromszög súlypontjának vetületénél legyen. Megadunk egy ilyen egyenest, mely az 1. megoldástól különböző: (1) alapján vizsgáljuk, az e egyenes milyen helyzete esetén lesz $a+b-2c = 0$. Ha $a+b-2c = 0$, akkor $a + b = 2c$, azaz C_1 az A_1B_1 szakasz felezőpontja. A CC_1 egyenestől egyenlő távol van A és B, és a CC_1 egyenes felezi az AB szakaszt is. Tehát CC_1 a C-ből induló súlyvonal egyenese, amire e merőleges. A C-ből induló súlyvonal és az AB egyenes nem lehetnek párhuzamosak, ez az 1. megoldástól különböző. 2 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: (i) A feladat kérdésére válaszolva olyan egyenes is megadható, amely esetén az (1) egyenletből kapott λ negatív.

(ii) A Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok 2011. áprilisi számában jelent meg a B. 4258-as feladat megoldása, melyben L-hez hasonló kifejezés minimumát kellett keresni. Ezzel találkozhattak azon versenyzők, akik a felkészülés és a matematikával való foglalkozás egyik legjobb lehetőségeként, rendszeres feladatmegoldói a lapnak.