Oktatási Hivatal

Az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
2011-2012. tanévi második fordulójának feladatmegoldásai
matematikából, a II. kategória számára

1. A pozitív egész n szám osztóit nagyság szerint növekedve felírtuk, az első volt az 1. A sorrendben a hatodik lett a 35. Keressük meg azt a legkisebb n értéket, amire ezek teljesülnek.

Megoldás: Legyen az első hat osztó $1 = d_1 < d_2 < d_3 < d_4 < d_5 < d_6 = 35$. Mivel $35 = 5 \cdot 7$, ezért az n szám osztója az 5 és a 7. Ha $d_2 = 2$, akkor 10 és 14 is n osztója. Ekkor az 1, 2, 5, 7, 10, 14 mind osztók, ez pedig hat darab 35-nél kisebb osztó. Ugyanígy, ha $d_2 = 3$, akkor az 1, 3, 5, 7, 15, 21 is osztók. Azt kaptuk, hogy n-nek nem lehet 2-vel, vagy 3-mal osztható osztója. 3 pont

Most már tudjuk, hogy $d_2 = 5$, $d_3 = 7$. d_4 és d_5 vagy 7-nél nagyobb, 35-nél kisebb prím, vagy olyan összetett, melynek minden prímtényezője legalább 5. Ez utóbbi csak a 25 lehet. 2 pont

A legkisebb n számot keressük. Ha a két legkisebb prím lesz a hiányzó két osztó, akkor n az 5, 7, 11, 13 számok legkisebb közös többese, ami az 5005. 1 pont

Ha a két hiányzó osztó közül az egyik a 25, a másik a 11, akkor n a 25, 7, 11 számok legkisebb közös többese, ami az 1925. 1 pont

A keresett n szám az 1925.

Összesen: 7 pont

2. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletrendszert:

$$\cos^2(x-y) - \sin^2(x+y) = 1 \tag{1}$$

$$xy = 2\pi^2. \tag{2}$$

Megoldás: Mivel $0 \le \cos^2(x-y) \le 1$ és $0 \le \sin^2(x+y) \le 1$, így az (1) egyenlet csak akkor teljesülhet, ha $|\cos^2(x-y)| = 1$ és $\sin^2(x+y) = 0$. 2 pont

1. eset: $\cos^2(x-y) = -1$, ekkor $x - y = \pi + 2k\pi$, ahol k egész. Mivel $\sin^2(x+y) = 0$, ebből $x + y = n\pi$, ahol n egész. Ebből x-et és y-t kifejezve:

$$x = \frac{\pi}{2}(2k+n+1), \quad y = \frac{\pi}{2}(n-2k-1)$$

Írjuk be ezeket a (2) egyenletbe:

$$2\pi^2 = \frac{\pi^2}{4}(n^2 - (2k+1)^2), \quad \text{azaz} \quad 8 = n^2 - (2k+1)^2$$

Ha $8 = n^2 - b^2$, ahol n, $b = 2k + 1$ egészek, akkor $8 = (n - b)(n + b)$ ahol $n - b$ és $n + b$ paritása azonos, így a lehetséges $(n - b; n + b)$ párok: (-4;-2), (-2;-4), (2;4) és (4;2). Ezekből az $(n; b)$ párok

$$(-3; 1) \quad (-3; -1) \quad (3; 1) \quad (3; -1) \tag{3}$$

Ebből megkapjuk a megfelelő n és k értékeket, felírhatjuk az $(x; y)$ megoldáspárokat:

$$(-\pi; -2\pi), \quad (-2\pi; -\pi), \quad (\pi; 2\pi), \quad (2\pi; \pi).$$

3 pont

2. eset: $\cos^2(x - y) = 1$, ekkor $x - y = 2l\pi$, ahol l egész. $x + y = n\pi$, ahol n egész. Ebből x-et és y-t kifejezve:

$$x = \frac{\pi}{2}(2l + n), \quad y = \frac{\pi}{2}(n - 2l)$$

Írjuk be ezeket a (2) egyenletbe:

$$2\pi^2 = \frac{\pi^2}{4}(n^2 - 4l^2), \quad \text{azaz} \quad 8 = n^2 - (2l)^2$$

Most $8 = n^2 - b^2$, ahol n, $b = 2l$ egészek. Az 1. eset vizsgálatakor kiderült, hogy ennek megoldásaként (3)-ban b minden lehetséges értéke páratlan. Másrészt most $b = 2l$, tehát b páros. Egyszerre nem lehet b páros is, páratlan is, ebben az esetben nincs megoldás.

2 pont

Összesen: 7 pont

Indulhatunk a következő módon is. Az (1) egyenletben használjuk ki, hogy

$$1 - \cos^2(x - y) = \sin^2(x - y),$$

így

$$0 \geq -\sin^2(x + y) = \sin^2(x - y) \geq 0.$$

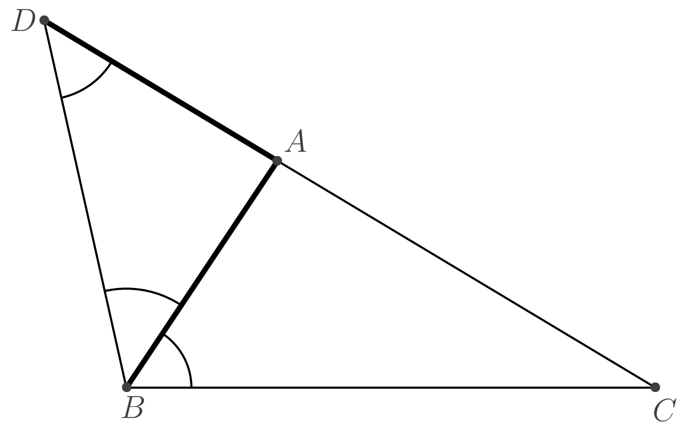
Ebből azt kapjuk, hogy $x + y = l\pi$ és $x - y = m\pi$, ahol l és m egészek. Innen a fenti megoldáshoz hasonlóan zárhatjuk le a feladatot.

3. Az ABC háromszögben $BAC\angle = 94°$, $ACB\angle = 39°$. Igazoljuk, hogy a háromszög oldalaira fennáll:

$$BC^2 = AC^2 + AC \cdot AB.$$

Megoldás: A háromszög harmadik szöge $ABC\angle = 47°$. Az A csúcsnál levő szög a B csúcsnál levő szög kétszerese. 1 pont

Az AC oldal A-n túli meghosszabbításán vegyük fel a D pontot úgy, hogy $AD = AB$ teljesüljön. Ekkor az egyenlőszárú ADB háromszög A-nál levő külső szöge 94°, a BD alapon fekvő szögek tehát 47°-osak. 2 pont



Az ABC és a BDC háromszögek ezek szerint hasonlók, hiszen C-nél levő szögük közös, és mindkettőben van $47°$-os szög. 2 pont

A megfelelő oldalak arányait felírva: $BC : DC = AC : BC$, amiből $BC^2 = AC \cdot DC$. Mivel $DC = AC+AB$, ezért ezt behelyettesítve éppen a bizonyítandó összefüggést kapjuk, azaz $BC^2 = AC^2 + AC \cdot AB$. 2 pont

Összesen: 7 pont

4. Oldjuk meg a valós számok körében:

$$x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1} = xy.$$

Megoldás: A gyökjelek miatt $x \geq 1$ és $y \geq 1$. 1 pont

Ezek szerint xy nem lehet 0, elosztjuk az egyenlet mindkét oldalát xy-nal.

$$\frac{\sqrt{y-1}}{y} + \frac{\sqrt{x-1}}{x} = 1.$$

Vizsgáljuk most külön a bal oldal első tagját:

$$\frac{\sqrt{y-1}}{y} = \sqrt{\frac{1}{y}\left(1 - \frac{1}{y}\right)}$$

Alkalmazzuk a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget az $\frac{1}{y}$ és $(1 - \frac{1}{y})$ számokra:

$$\sqrt{\frac{1}{y}\left(1 - \frac{1}{y}\right)} \leq \frac{1}{2}$$

4 pont

Ugyanez igaz a bal oldal másik tagjára is, így egyenletünk csak akkor teljesülhet, ha a számtani és mértani közepek között pont egyenlőség teljesül, azaz

$$\frac{1}{y} = \left(1 - \frac{1}{y}\right)$$

Ebből $y = 2$ és ugyanígy $x = 2$. 2 pont

Összesen: 7 pont