Oktatási Hivatal

Az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
2011-2012. tanévi harmadik, döntő fordulójának feladatmegoldásai
matematikából, a II. kategória számára

1. Az $ABCD$ szimmetrikus trapéz AB és CD oldalai párhuzamosak, $AB < CD$. Az AD és BC egyenesek metszéspontja legyen P. A trapéz köré írt kör A és C pontjához húzott érintőinek metszéspontja legyen Q. Igazoljuk, hogy a PQ egyenes párhuzamos az AB egyenessel.

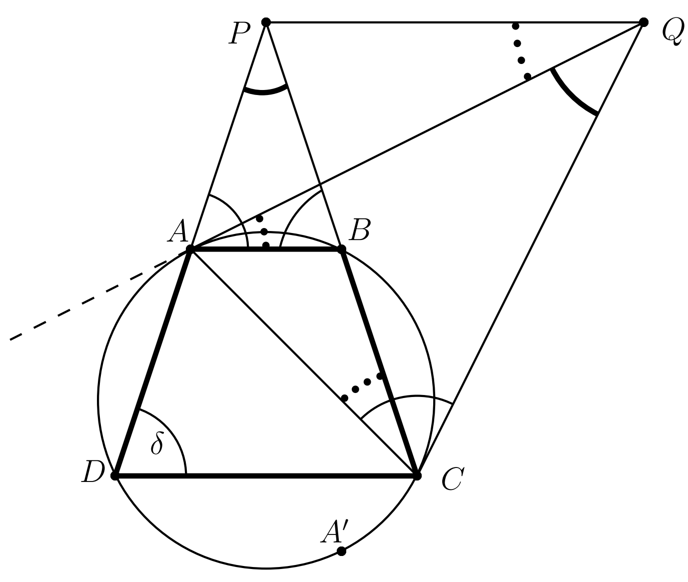
Megoldás: Használjuk az ábra jelöléseit. Legyen $ADC\angle = \delta$. Ekkor $ADC\angle = PAB\angle = \delta$, mivel egyállású szögek. A trapéz szimmetriája miatt $PBA\angle = \delta$, így $APB\angle = 180° - 2\delta$. 2 pont

$ADC\angle = ACQ\angle = \delta$, mivel ugyanahhoz az ívhez tartozó kerületi és érintő szárú kerületi szögek. $QC = QA$, mivel a Q-ból a körhöz húzott érintő szakaszok. Így $AQC\angle = 180° - 2\delta$. 1 pont

Azt kaptuk, hogy $APC\angle = AQC\angle = 180° - 2\delta$, így az AC szakasz $180° - 2\delta$ szögű látókörén rajta van P és Q, azaz $ACQP$ húrnégyszög. Ebből következik, hogy $PQA\angle = PCA\angle$. 2 pont

$PCA\angle = QAB\angle$, mivel ugyanahhoz az ívhez tartozó kerületi és érintő szárú kerületi szögek. Ezek szerint $QAB\angle = PQA\angle$, azaz PQ és AB párhuzamosak.

1 pont



Az $AB < CD$ feltétel miatt az ábra valóban így néz ki. Ha a trapéz köré írt kör A-val átellenes pontja A', akkor az $AB < CD$ feltétel miatt C a rövidebb $A'B$ ív belső pontja.

Ezért a C-ben húzott érintő valóban metszi az A-ban húzott érintőt és a metszéspont nem lehet az A-beli érintőnek A-ból induló másik félegyenesén, melyet az ábrán szaggatott vonallal jeleztünk. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3\}$. Az $f(x)$ függvény értelmezési tartománya A és minden A-beli x esetén $f(x) \in A$. Hány olyan $f(x)$ függvény van, amelyre

$$\{f(f(x))|x \in A\} = B?$$

Megoldás: Először megmutatjuk, hogy a keresett függvények halmazában $f(1) = 4$ nem lehetséges. Mivel $f(f(x))$ értékkészlete B, ezért létezik olyan $y \in A$, amelyre $f(f(y)) = 1$. Legyen ekkor $f(y) = z$, ekkor $f(f(z)) = f(1) = 4$, ami nem eleme B-nek. Pontosan ugyanígy láthatjuk be, hogy az 1, 2, 3 számok egyikéhez sem rendelhet a függvény sem 4-et, sem 5-öt. 1 pont

Megvizsgáljuk, mi lehet $f(4)$ és $f(5)$. Nem lehet $f(4) = 4$, mert ekkor $f(f(4)) = 4$, ugyanígy $f(5) = 5$ sem lehet. (i) Lehetséges, hogy $f(4)$ és $f(5)$ is B-beli elem. (ii) Ha $f(4) = 5$, akkor $f(f(4)) \in B$ miatt $f(5) \in B$. Ugyanez lehet a 4 és 5 szerepcseréjével is. 1 pont

A továbbiakban a keresett függvényeket három csoportra osztjuk és így számoljuk meg.

1. csoport: $f(1)$, $f(2)$ és $f(3)$ az 1, 2, 3 számok valamely permutációja, továbbá (i) szerint $f(4)$ és $f(5)$ B-beli elem. A permutáció 6-féle lehet, $f(4)$ és $f(5)$ egymástól függetlenül 3-féle lehet, tehát $3! \cdot 3 \cdot 3 = 54$ ilyen fügvény van. 1 pont

2. csoport: $f(1)$, $f(2)$ és $f(3)$ az 1, 2, 3 számok valamely permutációja, továbbá (ii) szerint alakul $f(4)$ és $f(5)$ értéke. Ekkor a permutáció 6-féle lehet. Ki kell választanunk 4, vagy 5 képe lesz-e B beli, ez két lehetőség, azon belül 3 különböző érték adható meg. Az ilyen függvények száma $3! \cdot 2 \cdot 3 = 36$. 1 pont

Ha $f(1)$=$f(2)$=$f(3)$, akkor (i) esetén az $f(f(x))$ értékkészletében egyetlen szám áll, (ii) esetén pedig csupán két szám. Így az utolsó csoportban azt vizsgáljuk, ha $f(1)$, $f(2)$ és $f(3)$ értéke két különböző érték, jelölje ezeket a és b. 1 pont

3. csoport: Legyen az $f(1)$, $f(2)$ és $f(3)$ értékek közül kettő a és egy b. Az (i) esetben $f(f(x))$ értékkészletében csak két szám áll, ez nem lehet. Az (ii) esetben $f(4)$ és $f(5)$ valamelyike B-beli, mégpedig az B-nek az a-tól és b-től különböző c eleme, mert csak így lesz az $f(f(x))$ értékkészlete B. Az ilyen függvényeket számba véve b értéke háromféle lehet, c értéke kétféle. További háromféle választásunk van, hogy az 1, 2 és 3 közül melyikhez rendeljük b-t, és két választásunk az (ii) esetben, hogy a 4, vagy 5 höz rendeljük c-t. Tehát $3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 36$ függvény tartozik ebbe a csoportba. 1 pont

A három csoportban összesen 54+36+36=126 függvényt számoltunk meg. A feladat feltételeinek eleget tevő függvények száma tehát 126. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. Legyen $h(1)=1$ és $n=2,3,...$ esetén $h(n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$. Mutassuk meg, hogy

$$L=\frac{1}{h^2(1)}+\frac{1}{2\cdot h^2(2)}+\frac{1}{3\cdot h^2(3)}+...+\frac{1}{2012\cdot h^2(2012)}<2.$$

Megoldás: Az L összegben az első tag 1. Mivel $k\geq 2$ esetén $h(k-1)<h(k)$, ezért a többi tagot felülről becsülhetjük a következő módon:

$$\frac{1}{k\cdot h^2(k)}<\frac{1}{k\cdot h(k)h(k-1)}=\frac{1}{h(k-1)}-\frac{1}{h(k)}$$

6 pont

Ekkor L felülről becsülve és kihasználva, hogy $h(2012)>0$:

$$L<\frac{1}{h(1)}+\left(\frac{1}{h(1)}-\frac{1}{h(2)}\right)+\left(\frac{1}{h(2)}-\frac{1}{h(3)}\right)+...+\left(\frac{1}{h(2011)}-\frac{1}{h(2012)}\right)=2-\frac{1}{h(2012)}<2$$

1 pont

Összesen: 7 pont