



Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny 2011–12-es tanév

MATEMATIKA, III. kategória

Az első (iskolai) forduló feladatai
a gimnáziumok speciális matematikai osztályainak tanulói részére

1. Adott három, nem egy egyenesbe eső pont, A , B és C . Hol helyezkednek el a térben azok a P pontok, amelyekre $AB^2 + PC^2 = BC^2 + PA^2 = CA^2 + PB^2$?
2. Lássuk be, hogy ha p prímszám, akkor np osztója $\binom{np}{p} - n$ -nek.
3. Mely k és n pozitív egészekre teljesül: $|2^k - 3^n| = 17$?
4. Az iskolában a kisdíák Sziszüphosz szorgalmát piros, kék és zöld pontokkal jutalmazzák. Három összegyűjtött piros pont beváltható egy kék pontra, három kék pont egy zöld pontra cserélhető be, és végül három zöld pontért ismét egy piros pont jár. Sziszüphosznak az év végén mindhárom színből 2011-2011 pontja van. Ezeket addig cserélgeti, amíg mindegyikből legfeljebb két pontja marad. Hány piros, kék és zöld pontja lehet Sziszüphosznak a cserék elvégzése után?
5. Adott egy 2011 csúcsú konvex sokszög úgy, hogy semelyik négy csúcs sem esik egy körre. A csúcsokból kiválasztható ponthármasokra megrajzoljuk a rájuk illeszkedő kört. Egy ilyen kör sovány, ha a sokszögnek van olyan csúcsa, amely kívül van a körön, ellenkező esetben a kör kövér. Sovány vagy kövér körből van több?

Valamennyi feladat 7 pontot ér.