Oktatási Hivatal

A 2013/2014. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
első forduló

MATEMATIKA

II. KATEGÓRIA
(GIMNÁZIUM)

Javítási–értékelési útmutató

1. Melyek azok a pozitív p és q prímek, amelyekre a

$$p+q, \quad p+q^2, \quad p+q^3, \quad p+q^4$$

számok mindegyike prím?

Megoldás: A pozitív prímszámok a 2 kivételével mind páratlanok. Ha p és q egyike sem 2, akkor $p+q$ 2-nél nagyobb páros szám, ami nem lehet prím. Nem lehet $p=q=2$ sem, hiszen akkor $p+q=4$, ami nem prím. Tehát p és q közül pontosan az egyik lehet a 2. 3 pont

Legyen először $p=2$. Ha $q=3$, akkor a feladatban szereplő négy további szám az 5, 11, 29 és 83. Ezek mindegyike prím. Ha $q \neq 3$, akkor 3-as maradéka lehet 1. $q=3k+1$ esetén $p+q=2+3k+1=3\cdot(k+1)$, ami 3-mal osztható 3-nál nagyobb szám, azaz nem prím. Amennyiben $q=3k+2$ alakú, akkor $p+q^2=2+9k^2+12k+4=3\cdot(3k^2+4k+2)$, ami ismét 3-nál nagyobb 3-mal osztható szám, ez sem lehet prím. 2 pont

Legyen $q=2$. Ha $p=3$, akkor a feladatban szereplő négy további szám az 5, 7, 11, 19. Ezek mindegyike prím. Ha $p\neq 3$, akkor $p=3k+1$ esetén az előzőek mintájára $p+q$, $p=3k+2$ esetén $p+q^2=3k+2+4=3\cdot(k+2)$ lesz 3-mal osztható 3-nál nagyobb szám, ami nem lehet prím. 2 pont

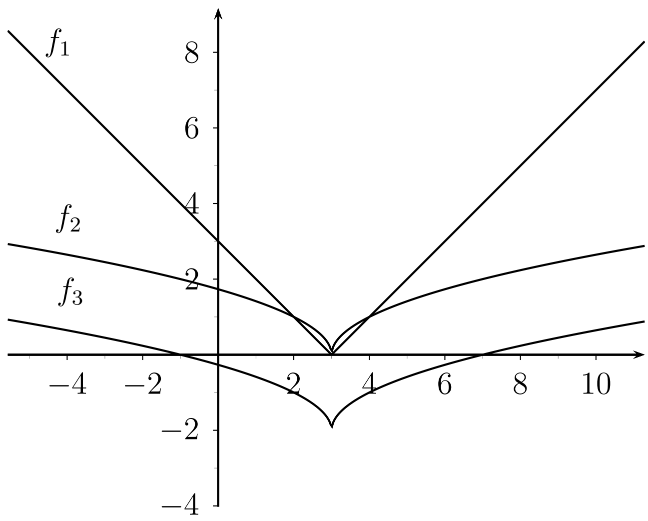
Azt kaptuk, hogy a feladat feltételeinek két $(p;q)$ számpár felel meg, a $(2;3)$ és a $(3;2)$.

Összesen: 7 pont

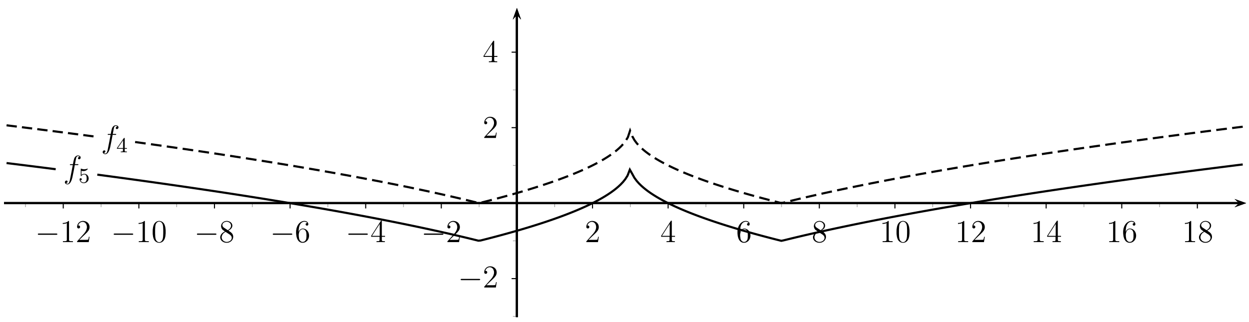
2. Határozzuk meg, a p valós paraméter mely értékeinél hány megoldása van a következő egyenletnek:

$$\left|\sqrt{|x-3|}-2\right|-1=p$$

Megoldás: A bal oldalt ábrázoljuk, mint az x változó függvényét. A különböző műveletek elvégzése során nyomon követjük a függvény transzformációit. Legyen $f_1=|x-3|$, véve ennek gyökét kapjuk az $f_2=\sqrt{|x-3|}$ függvényt. Ebből kettőt levonva a grafikon az y tengellyel párhuzamosan 2 egységnyivel negatív irányba mozdul, így kapjuk $f_3=\sqrt{|x-3|}-2$-t. 2 pont



Mivel $f_4 = |f_3|$, ezért f_4 grafikonját úgy kapjuk, hogy az f_3 függvény grafikonjának x tengely alatti részét tükrözzük az x tengelyre. Ebből 1-et kivonva, azaz f_4 szaggatottal jelölt grafikonját y tengellyel párhuzamosan negatív irányba 1-gyel elmozdítva kapjuk a kiinduló egyenlet bal oldalán álló $f_5 = |\sqrt{|x-3|} - 2| - 1$ függvény grafikonját. 2 pont



A feladatban kitűzött egyenlet jobb oldalán a p konstans van egyedül. Ha ezt, mint függvényt ábrázoljuk, akkor grafikonja az $y = p$ egyenletű egyenes, amely az x tengellyel párhuzamos. A megoldások számát tehát az dönti el, hogy az f_5 függvény grafikonjának hány közös pontja van az $y = p$ egyenletű egyenessel. 1 pont

Mivel az f_4 függvény értékkészlete a $[0; \infty)$, ezért az f_5 értékkészlete $[-1; \infty)$. Ha tehát $p < -1$, az egyenletnek nincs megoldása. Ha $p = -1$, akkor az egyenletnek két megoldása van.

f_3-nak az $x = 3$-nál van a minimuma és itt értéke -2. Így f_4 értéke $x = 3$-nál 2, tehát f_5 értéke $x = 3$-nál 1. Ha tehát $-1 < p < 1$ akkor az egyenletnek négy megoldása van. Ha $p = 1$, akkor a megoldások száma három, végül $1 < p$ esetén két megoldás van. Összefoglalva:

p értéke	$p < -1$	$p = -1$	$-1 < p < 1$	$p = 1$	$1 < p$
megoldások száma	0	2	4	3	2

2 pont

Összesen: 7 pont

2. Megoldás: A feladat megoldását algebrai úton is nyomon követhetjük. Rendezés után

$$\left|\sqrt{|x-3|}-2\right| = p+1$$

tehát $p+1 \geq 0$, különben nincs megoldás. 1 pont

Az abszolútérték "feloldása" következik:

(i) ha $\sqrt{|x-3|}-2 \geq 0$ akkor $\sqrt{|x-3|}-2 = p+1$, azaz $\sqrt{|x-3|} = p+3$;

(ii) ha $\sqrt{|x-3|}-2 < 0$ akkor $2-\sqrt{|x-3|} = p+1$, azaz $\sqrt{|x-3|} = 1-p$. 2 pont

$p = -1$ esetén (i) és (ii) ugyanazt az egyenletet adja, $\sqrt{|x-3|} = 2$ és ennek két megoldása van. 1 pont

Ha $-1 < p < 1$ akkor (i) és (ii) esetben is két megoldás adódik (négyzetre emelés után az $x-3$ illetve $3-x$ hoz egy-egy megoldást.) Ekkor tehát négy megoldás van. 1 pont

Ha $p = 1$ akkor (i) két megoldást ad, (ii) viszont csak egyet, tehát ekkor a megoldások száma három. 1 pont

Ha $p > 1$, akkor (ii) esetben nincs gyök, az (i) eset két gyököt ad, tehát ilyenkor két megoldás van. 1 pont

3. Hány olyan ötjegyű tízes számrendszerbeli pozitív egész szám van, melyben a jegyek szorzata 50-re végződik?

Megoldás: Nem szerepelhet a számban a 0 számjegy, mert ekkor a jegyek szorzata is 0 lenne, ami nem 50-re végződő szám. 1 pont

Ha a jegyek szorzata 50-re végződik, akkor 50-nel osztható. $50 = 25 \cdot 2$, a 25 és a 2 relatív prím, tehát 25-tel és 2-vel is osztható. 1 pont

Ha a jegyek szorzata 4-gyel is osztható lenne, akkor már 00-ra végződne. Azt kaptuk, hogy a jegyek szorzatának prímtényezős felbontásában a 2 kitevője 1, az 5 kitevője legalább 2. 1 pont

Az eddigiek alapján vegyük sorra a lehetőségeket a szerint, hogy a számban hány 5-ös számjegy szerepel.

(i) Két darab 5-ös esetén van még további három számjegy. Ezek közül egy lehet páros, az sem lehet 4-gyel osztható. A páros jegy tehát a 2 és a 6 valamelyike. A további két számjegy lehet az 1, 3, 7, 9 bármelyike. Kiválasztjuk az öt helyiérték közül a két 5-ös helyét, ez lehet $\binom{5}{2} = 10$-féle. A maradék három helyből kiválasztjuk a páros helyét, ide két szám kerülhet, ez 6 lehetőség. A maradék két hely mindegyikénél egymástól függetlenül választható 4 szám, ami 16 eset. Így ebben az esetben $10 \cdot 6 \cdot 16 = 960$ számot kapunk. 1 pont

(ii) Három darab 5-ös esetén van még további két számjegy. Az előzőek mintájára az 5-ösök helye lehet $\binom{5}{3} = 10$-féle. A páros szám két helyre kerülhet és kétféle lehet, így 4 lehetőség van. A megmaradt egy helyre is 4-féle szám írható, az 1, 3, 7, 9 valamelyike. Ekkor $10 \cdot 4 \cdot 4 = 160$ számot kapunk. 1 pont

(iii) Négy darab 5-ös esetén egy további jegy van, ami csak a 2 vagy a 6 lehet. A páros jegy öt helyre kerülhet és kétféle lehet, tehát itt 10 jó számot kapunk. 1 pont

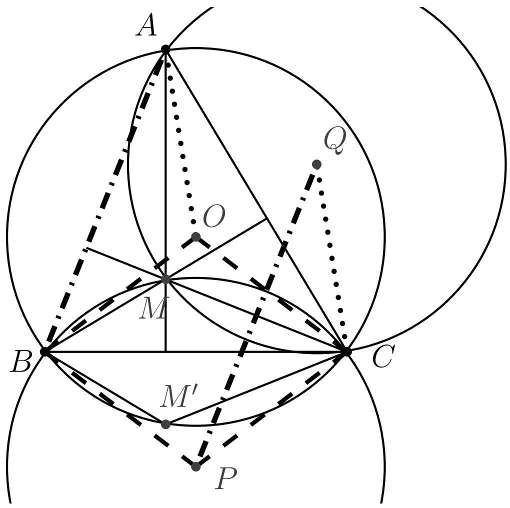
Összesen 960+160+10=1130 szám van, ami megfelel a feladat feltételeinek. 1 pont

Összesen: 7 pont

4. Jelölje M a hegyesszögű ABC háromszög magasságpontját. Legyen P, Q és R rendre a BCM, CAM és ABM háromszögek köré írt köreinek középpontja.
(a) Igazoljuk, hogy ABC és PQR egybevágó háromszögek.
(b) Igazoljuk, hogy az AP, BQ és CR egyenesek egy pontra illeszkednek.

Megoldás: (a) A BM egyenes a háromszög magasságvonala, tehát merőleges az AC oldalra, ezért $CBM\angle = 90° - \gamma$. Hasonlóan adódik, hogy $BCM\angle = 90° - \beta$. A BMC háromszögben ezek alapján $BMC\angle = 180° - \alpha$. Tükrözzük az M pontot a BC oldalra, így kapjuk az M' pontot, amelyre $BM'C\angle = BMC\angle = 180° - \alpha$. Az $ABM'C$ tehát húrnégyszög, mivel szemközti szögeinek összege 180°. 1 pont

Az imént beláttuk, hogy a háromszög magasságpontját a háromszög egy oldalára tükrözve a tükörkép a köré írt körre esik. Ez megfordítva azt jelenti, hogy a köré írt kört a háromszög oldalára tükrözve, a kör tükörképe átmegy az M ponton. Ezek szerint a feladatban szereplő P, Q és R pontokat úgy kaphatjuk, hogy az ABC háromszög köré írt körének O középpontját tükrözzük rendre a BC, CA és AB oldalakra. 1 pont



Mivel O tükörképe BC-re P és $BO = CO$, ezért $BOCP$ rombusz, azaz PC párhuzamos és egyenlő BO-val. Ugyanígy igaz, hogy CQ és OA párhuzamos és egyenlő. Ezek szerint a BOA és PCQ háromszögek egybevágóak, amiből következik, hogy BA és PQ (i) párhuzamos és (ii) egyenlő.

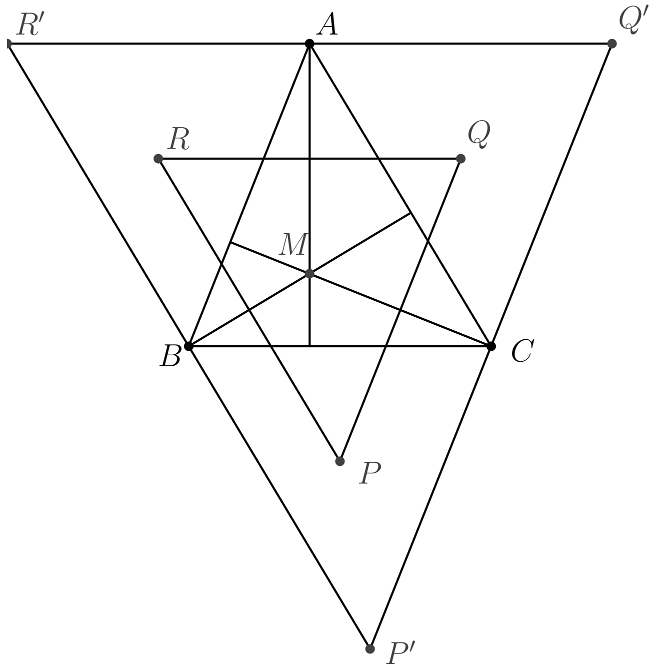
Az (ii) tulajdonságból adódik, hogy ABC és PQR egybevágóak, hiszen a BA, PQ párnál látott módon igazolható, hogy oldalaik páronként egyenlő hosszúságúak. 2 pont

Az (a) rész bizonyításának utóbbi 2 pontjához egy másik érvelés: O tükörképe a háromszög oldalaira P, Q és R. E tükörképeket azonban úgy is megkaphatjuk, hogy az O pontnak az oldalakon levő vetületeit (azaz az oldalfelező pontokat) O középpontú 2 arányú hasonlósággal visszük a P, Q és R pontokba. Ám az oldalfelezők egy, az eredetihez hasonló, fele akkora háromszög csúcsai, tehát PQR egybevágó ABC-vel.

(b) Az (a) részben kiderült, hogy BA és PQ párhuzamos és egyenlő, így az $ABPQ$ négyszög paralelogramma, ennek átlói felezik egymást. Ezek szerint AP felezőpontján átmegy BQ. Logikai szimmetria miatt ugyanez elmondható az AP, BQ és CR szakaszok közül választható tetszőleges pár esetén. A három szakasz tehát egy ponton megy át, és ez a pont felezi mind a három szakaszt. 3 pont

Összesen: 7 pont

2. Megoldás: (a) A háromszög köré írt körének középpontja rajta van minden oldalának a felező merőlegesén. Ezek szerint az MC szakasz felező merőlegesén van a P és Q pont. Nagyítsuk a PQR háromszöget az M pontból kétszeresre, így kapjuk a $P'Q'R'$ háromszöget. Ekkor $P'Q'$ átmegy a C ponton, továbbá mivel PQ merőleges az MC-re, azaz PQ és AB párhuzamosak, továbbá PQ és $P'Q'$ a nagyításból adódóan párhuzamosak, ezért $P'Q'$ párhuzamos AB-vel. Ugyanilyen érveléssel adódik, hogy $Q'R'$ átmegy A-n és párhuzamos BC-vel, továbbá $R'P'$ átmegy B-n és párhuzamos AC-vel. 2 pont



Most az ABC háromszög S súlypontját válasszuk középpontnak és végezzünk $-\frac{1}{2}$ arányú középpontos hasonlóságot, ez a $P'Q'R'$ háromszög oldalait az ABC megfelelő oldalaiba viszi, így a $P'Q'R'$ háromszög képe éppen az ABC lesz. Két középpontos hasonlóságot végeztünk, az elsőben 2, a másodikban $-\frac{1}{2}$ volt az arány. Mivel ezek szorzata -1, ezért a kiindulási PQR háromszöget középpontos tükrözés viszi az ABC háromszögbe, így azok egybevágóak. 2 pont

(b) Beláttuk, hogy PQR háromszöget középpontos tükrözés viszi az ABC háromszögbe. A transzformáció szerinti megfelelő pontokat összekötő egyenesek áthaladnak a középpontos tükrözés centrumán, tehát PA, QB és RC egy ponton haladnak át. Most is megkaptuk, hogy a közös pont éppen felezi ezeket a szakaszokat. 3 pont

Megjegyzés: A feladat nagyon sokféleképpen megoldható. Más, helyes megoldás esetén is a pontozás során az (a) rész 4, a (b) rész 3 pontot ér.

5. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenséget:

$$\sqrt{\operatorname{tg}^2 x - 3} > 1 + 2 \cdot \operatorname{tg} x$$

Megoldás: A gyökjel alatti kifejezés nem lehet negatív, tehát $\operatorname{tg}^2 x - 3 \geq 0$, azaz (i) $\operatorname{tg} x \leq -\sqrt{3}$, vagy (ii) $\operatorname{tg} x \geq \sqrt{3}$. 2 pont

Az (i) esetben a bal oldalon álló gyökös kifejezés értéke legalább 0, míg a jobb oldal legfeljebb $1 - 2 \cdot \sqrt{3}$. Ebben az esetben az egyenlőtlenség teljesül, a megfelelő x értékek

$$-\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi < x \leq -\frac{\pi}{3} + k \cdot \pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

3 pont

Az (ii) esetben az egyenlőtlenség mindkét oldala nemnegatív, négyzetre emelhetünk:

$$\operatorname{tg}^2 x - 3 > 1 + 4 \cdot \operatorname{tg} x + 4 \cdot \operatorname{tg}^2 x$$

Mivel $\operatorname{tg} x > 0$, ezért a bal oldal kisebb, mint $\operatorname{tg}^2 x$, a jobb oldal pedig nagyobb, ezért az egyenlőtlenség itt nem teljesülhet. 2 pont

Összesen: 7 pont