**A 2013/2014. tanévi**
**Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny**
**második forduló**

**MATEMATIKA**

**II. KATEGÓRIA**
**(GIMNÁZIUM)**

**Javítási–értékelési útmutató**

1. Maximum hány egész számot választhatunk ki a $J = \{n \mid 1 < n < 121; n \in \mathbb{Z}\}$ halmazból úgy, hogy közülük bármely kettő relatív prím legyen, ha egyikük sem lehet prím?

**Megoldás:** Legyen $n$ az egyik kiválasztott szám és legkisebb prímosztója $p$. Ekkor $n = p \cdot q$, ahol $p \le q$ és így $p^2 \le n \le 120$. Azt kaptuk, hogy $p^2 \le 120$, azaz $p$ 11-nél kisebb. 3 pont

A kiválasztott számok legkisebb prímosztója 2, 3, 5 vagy 7 lehet. 1 pont

Bármely két kiválasztott szám legkisebb prímosztója különböző, mivel relatív prímek. Ezek szerint legfeljebb négy számot válszthattunk ki. 2 pont

Négy szám kiválasztható a feltételeknek megfelelő módon, pl 4, 9, 25 és 49. 1 pont

**Összesen: 7 pont**

2. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$x^2 + 4\left(\frac{x}{x-2}\right)^2 = 45$$

**Megoldás:** $x = 2$ nem lehet, mert ekkor a tört nevezőjében nulla lenne. 1 pont

Szorozzuk be az egyenletet $(x-2)^2$-nel és rendezzünk 0-ra:

$$x^4 - 4x^3 - 37x^2 + 180x - 180 = 0 \qquad 1 \text{ pont}$$

A bal oldal szorzattá alakítható:

$$(x-3)(x-6)(x^2 + 5x - 10) = 0 \qquad 3 \text{ pont}$$

Szorzat akkor és csak akkor 0, ha valamelyik tényezője 0. Az első tényezőből kapjuk az $x_1 = 3$, a másodikból az $x_2 = 6$ megoldást. A harmadik tényező másodfokú, ennek gyökei $x_3 = \frac{-5+\sqrt{65}}{2}$ és $x_4 = \frac{-5-\sqrt{65}}{2}$. 1 pont

Ellenőrizve, a négy gyök valóban kielégíti a feladatban kitűzött egyenletet. 1 pont

**Összesen: 7 pont**

3. Tekintsük az összes olyan parabolát, melyek egyenlete $y = x^2 + ax + b$, ahol $a$ és $b$ valós számok, továbbá a koordinátatengelyeket három különböző pontban metszik. Bármely parabola esetén ez a három pont meghatároz egy kört. Mutassuk meg, hogy az összes ilyen kör átmegy egy közös ponton.

**Megoldás:** Jelölje a parabola és az $y$ tengely metszéspontját $y_1$. Ennek értékét megkapjuk, ha az $y = x^2 + ax + b$ egyenletbe az $x = 0$-t helyettesítjük, így $y_1 = b$. $b = 0$ nem lehet, mert akkor a parabola áthalad az origón és nem jöhet létre a tengelyekkel három metszéspont. 1 pont

A parabola és az $x$ tengely metszéspontjai a $0 = x^2 + ax + b$ másodfokú egyenlet gyökei. Jelölje ezeket $x_1$ és $x_2$. A feladat szövege szerint a parabola három különböző pontban metszi a tengelyeket. Mivel az $y$ tengelyt csak egyetlen pontban metszi, ezért $x_1 \neq x_2$, azaz $a^2 - 4b > 0$. 1 pont

Legyen $y_2$ a feladat szövegében szereplő kör és az $y$ tengely második metszéspontja. Amennyiben a kör érinti az $y$ tengelyt, akkor legyen $y_2 = y_1$.

Tekintsük az origónak a körre vonatkozó hatványát az $x$ és az $y$ tengelyekkel, mint szelőkkel. 2 pont

Mivel mindkét szelőre a hatvány ugyanakkora, ezért $x_1x_2 = y_1y_2$. A Viéte formula alapján $x_1x_2 = b$, továbbá $y_1 = b$. Mivel $b \neq 0$, így $y_2 = 1$. 2 pont

$y_2$ értéke konstans, tehát az összes kör, amely a feladat szövegének eleget tesz átmegy a $(0; 1)$ ponton. 1 pont

**Összesen: 7 pont**

Megjegyzés: A bizonyítás befejezhető a pont körre vonatkozó hatványa nélkül is, ha a kör $K = \left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ középpontjának a távolságát felírjuk kétféleképpen az $x$ és az $y$ tengelyeken levő metszéspontoktól.

4. Hány darab 150 jegyű tízes számrendszerbeli pozitív egész szám van, melynek minden jegye páratlan és bármely két szomszédos számjegy eltérése 2?

**Megoldás:** Tekintsük az $i$ jegyű tízes számrendszerbeli pozitív egészeket, melyeknek minden jegye páratlan és bármely két szomszédos számjegy eltérése 2. Legyen $a_i$ azoknak a száma, melyeknek utolsó jegye 1 vagy 9. Legyen $b_i$ azoknak a száma, melyeknek utolsó jegye 3 vagy 7. Legyen $c_i$ azoknak a száma, melyeknek utolsó jegye 5. $i = 1$ esetén $a_1 = 2$, $b_1 = 2$ és $c_1 = 1$. 1 pont

Rekurzió segítségével leírhatjuk sorozatainkat: $i+1$ jegyű 1-re vagy 9-re végződő számot csak egyféleképpen kaphatunk 3-ra vagy 7-re végződő számból, ezért $a_{i+1} = b_i$. Ugyanez igaz az 5-re végződőekre is, ezért $c_{i+1} = b_i$. 3-ra vagy 7-re végződő számot egyféleképpen kaphatunk 1-re vagy 9-re végződő számból, de kétféleképpen kaphatunk 5-re végződő számból (az 5-ös után írható 3 vagy 7), ezért $b_{i+1} = a_i + 2c_i$. 1 pont

Ebből $i = 2$-re $a_2 = 2$, $b_2 = 4$ és $c_2 = 2$ adódik. (Valóban, a megfelelő számok: 31,79; 13, 53, 57, 97; 35, 75.)

A rekurzió segítségével a sorozat további elemeit vizsgálva észrevehető, hogy

$$a_{2i} = c_{2i} = 2 \cdot 3^{i-1} \quad \text{és} \quad b_{2i} = 4 \cdot 3^{i-1}$$ 2 pont

Ezt teljes indukcióval bizonyítjuk. Kezdő lépés: $i = 1$ esetén már kiszámoltuk a sorozatok megfelelő elemét és ezek valóban teljesítik az összefüggést.

Indukciós lépés: Feltesszük, hogy $a_{2i} = c_{2i} = 2 \cdot 3^{i-1}$ és $b_{2i} = 4 \cdot 3^{i-1}$, majd ennek segítségével bizonyítjuk az állítást $i+1$-re. Az alábbi három sor mindegyikében az első két egyenlőségnél a rekurziós szabályt, a harmadiknál az indukciós hipotézist használjuk:

$$a_{2(i+1)} = b_{2i+1} = a_{2i} + 2c_{2i} = 2 \cdot 3^{i-1} + 4 \cdot 3^{i-1} = 2 \cdot 3^i$$

$$b_{2(i+1)} = a_{2i+1} + 2c_{i+1} = b_{2i} + 2b_{2i} = 4 \cdot 3^{i-1} + 8 \cdot 3^{i-1} = 4 \cdot 3^i$$

$$c_{2(i+1)} = b_{2i+1} = a_{2i} + 2c_{2i} = 2 \cdot 3^{i-1} + 4 \cdot 3^{i-1} = 2 \cdot 3^i$$

2 pont

A feladatban feltett kérdésre a válasz a fentiek alapján $8 \cdot 3^{74}$, hiszen $a_{150} + b_{150} + c_{150} = 2 \cdot 3^{74} + 4 \cdot 3^{74} + 2 \cdot 3^{74} = 8 \cdot 3^{74}$.

1 pont

**Összesen: 7 pont**