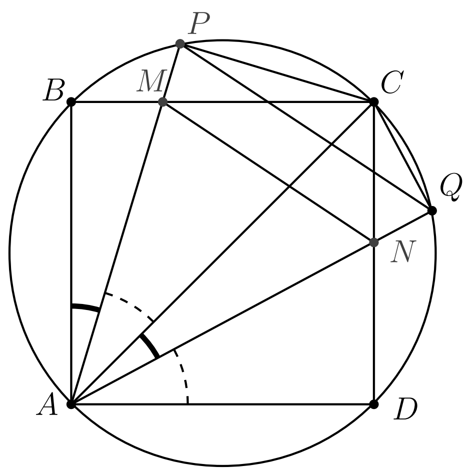
Oktatási Hivatal

A 2013/2014. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
harmadik, döntő forduló

MATEMATIKA II. KATEGÓRIA

<u>Javítási–értékelési útmutató</u>

1. Az $ABCD$ négyzet köré írt körön adott a P és Q pont úgy, hogy $PAQ\angle = 45°$, továbbá AP és BC metszi egymást az M, AQ és CD az N pontban. Mutassuk meg, hogy a PQ és az MN szakaszok párhuzamosak.



Megoldás: Mivel $PAQ\angle = 45°$, ezért $PAB\angle = QAC\angle$. Mivel AC átmérő, ezért AQC háromszög derékszögű. Így két szög egyenlőségéből adódóan ABM és AQC hasonlóak, megfelelő oldalaik aránya:

$$\frac{AM}{AC} = \frac{AB}{AQ}$$ 3 pont

Ugyanígy ADN és APC is hasonló, amiből:

$$\frac{AN}{AC} = \frac{AD}{AP}$$

Mivel $AB = AD$ az előző két összefüggés megfelelő oldalainak hányadosát képezve

$$\frac{AM}{AN} = \frac{AP}{AQ}$$ 2 pont

adódik, ami a párhuzamos szelők tételének megfordítása miatt a $QAP\angle$-ben azt jelenti, hogy az MN és PQ szelők párhuzamosak. 2 pont

Összesen: 7 pont

2. Anna és Bori tulipánokat ültetnek egy sorba, n helyre. Ezt a következő játékos formában teszik: felváltva ültetnek egy-egy tulipánt úgy, hogy egymással közvetlenül szomszédos helyekre nem kerülhet tulipán. Anna kezdi a játékot. Az nyer, aki utoljára tud tulipánt ültetni. Kinek van nyerő stratégiája, ha (a) $n = 2013$; (b) $n = 12$?

Megoldás: Képzeljünk minden helyre egy üres virágcserepet, ezek közül amibe ültetünk és szomszédjait mindig kivesszük a sorból. Ha van egymás mellett n cserép, akkor négyféle dolog történhet:

(i) Ha n 1, vagy 2, akkor bármelyiket választva az összes cserepet elvesszük. A továbbiakban $n > 2$.

(ii) A szélső cserépbe ültetve két cserepet veszünk ki a sor széléről.

(iii) A legszélső melletti cserépbe ültetve három cserepet veszünk el.

(iv) Ha $n > 5$, akkor további lehetőség, hogy a sor közepéről kiveszünk három cserepet és a meglevő sort két nemüres külön részre bontjuk. Például 12 cserép esetén ha a negyedikbe ültetünk, akkor marad az elején két cserép, kiveszünk hármat és marad utána még 7 cserép. Jelöljük ezt így $(12) \to (2; 7)$, a zárójelen belül pontosvesszővel elválasztva egymás után írjuk az egymás melletti cserepek számát. Ezzel a lépéssel egy sorból két kisebb keletkezett, ezeket a továbbiakban nevezzük szakaszoknak, az i cserépből álló szakaszok számát jelölje s_i. 1 pont

A feladat (a) részében 2013 hely van, ami páratlan. Ha Anna első lépésében kiválasztja a középsőt, akkor két ugyanakkora rész keletkezik, $(2013) \to (1005; 1005)$. Ha Bori választ egy helyet, akkor Anna mindig a középső helyre szimmetrikusan kiválaszthatja ennek tükörképét és így nyerhet. 2 pont

Ez a szimmetria-stratégia lesz a célunk, azaz olyan helyzet létrehozása, amelyben minden szakasznak van egy ugyanannyi cserépből álló párja. Ha ellenfelünk bármelyikben kiválasztja a k-adik cserepet, mi a másikban választjuk ugyanúgy a k-adikat. Az egy vagy két cserépből álló szakaszok egyformának számítanak, mert mindkettő típus eltűnik, ha belőle választunk. Szimmetria-stratégiához tehát olyan helyzet előállítása a célunk, amelyben $s_1 + s_2$ és s_i is páros (minden $i > 2$ esetén). 2 pont

Megmutatjuk, hogy a (b) részben is Anna tud nyerni. Legyen az első lépés $(12) \to (2; 7)$. Bori minden lehetséges lépésére adunk Anna részéről olyan válaszlépést, amely szimmetria-stratégia miatt Anna győzelmét jelenti:

Bori: $(2; 7) \to (7)$, Anna: $(7) \to (2; 2)$.

Bori: $(2; 7) \to (2; 5)$, Anna: $(2; 5) \to (2; 2)$.

Bori: $(2; 7) \to (2; 4)$, Anna: $(2; 4) \to (2; 2)$.

Bori: $(2; 7) \to (2; 1; 3)$, Anna: $(2; 1; 3) \to (2; 1)$.

Bori: $(2; 7) \to (2; 2; 2)$, Anna: $(2; 2; 2) \to (2; 2)$. 2 pont

Összesen: 7 pont

3. Legyenek $a_1, a_2, a_3, ..., a_{2014}$ 1-nél kisebb pozitív valós számok, melyek szorzata A, valamint legyen $A_i = \frac{A}{a_i}$, $i \in \{1; 2; ...; 2014\}$. Bizonyítsuk be, hogy

$$1 < \frac{1}{\log_{a_1}(a_1a_2)} + \frac{1}{\log_{a_2}(a_2a_3)} + ... + \frac{1}{\log_{a_{2014}}(a_{2014}a_1)} < \frac{1}{\log_{A_1} A} + \frac{1}{\log_{A_2} A} + ... + \frac{1}{\log_{A_{2014}} A}$$

Megoldás: A bizonyítandó egyenlőtlenség jobboldalát átalakítjuk a logaritmus azonosságait felhasználva:

$$\frac{1}{\log_{A_1} A} + \frac{1}{\log_{A_2} A} + ... + \frac{1}{\log_{A_{2014}} A} = \log_A A_1 + \log_A A_2 + ... + \log_A A_{2014} =$$

$$= \log_A A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_{2014} = \log_A A^{2013} = 2013 \qquad 1 \text{ pont}$$

Alakítsuk át a középen álló kifejezést is:

$$\frac{1}{\log_{a_1}(a_1a_2)} + \frac{1}{\log_{a_2}(a_2a_3)} + ... + \frac{1}{\log_{a_{2014}}(a_{2014}a_1)} = \frac{1}{1 + \log_{a_1} a_2} + \frac{1}{1 + \log_{a_2} a_3} + ... + \frac{1}{1 + \log_{a_{2014}} a_1}$$

Legyen $b_1 = \log_{a_1} a_2$, $b_2 = \log_{a_2} a_3$, ..., $b_{2013} = \log_{a_{2013}} a_{2014}$ és $b_{2014} = \log_{a_{2014}} a_1$. Ekkor

$$\frac{1}{1 + \log_{a_1} a_2} + \frac{1}{1 + \log_{a_2} a_3} + ... + \frac{1}{1 + \log_{a_{2014}} a_1} = \frac{1}{1 + b_1} + \frac{1}{1 + b_2} + ... + \frac{1}{1 + b_{2014}}$$

Áttérve más alapra $b_i = \dfrac{\ln a_{i+1}}{\ln a_i}$ alakból következik, hogy $b_1 \cdot b_2 \cdot ... \cdot b_{2014} = 1$. 1 pont

Ezt a szorzatot bontsuk egymás utáni párok szorzatára: $(b_1b_2)\cdot(b_3b_4)\cdot...\cdot(b_{2013}b_{2014}) = 1$. Mivel a párok szorzata 1, ezért van olyan k és l amelyekre $b_{2k-1}b_{2k} \leq 1$ és $b_{2l-1}b_{2l} \geq 1$.
1 pont

Használjuk ki, hogy a feladatban megadott számok 1-nél kisebb pozitív számok, ezért $b_i > 0$ (i=1,2,...,2014). Ezzel a kitűzött egyenlőtlenség első részét igazolni tudjuk, hiszen:

$$\frac{1}{1 + b_1} + \frac{1}{1 + b_2} + ... + \frac{1}{1 + b_{2014}} > \frac{1}{1 + b_{2k-1}} + \frac{1}{1 + b_{2k}} = \frac{2 + b_{2k-1} + b_{2k}}{1 + b_{2k-1} + b_{2k} + b_{2k-1}b_{2k}} \geq 1$$

2 pont

Hátra van még a következő bizonyítása:

$$\frac{1}{1 + b_1} + \frac{1}{1 + b_2} + ... + \frac{1}{1 + b_{2014}} < 2013$$

Mindkét oldalt ugyanannyival növelve:

$$\frac{1}{1 + b_1} + \frac{1}{1 + b_2} + ... + \frac{1}{1 + b_{2014}} + \frac{b_1}{1 + b_1} + \frac{b_2}{1 + b_2} + ... + \frac{b_{2014}}{1 + b_{2014}} = 2014 <$$

$$< 2013 + \frac{b_1}{1 + b_1} + \frac{b_2}{1 + b_2} + ... + \frac{b_{2014}}{1 + b_{2014}}$$

Tehát a bizonyítandó:

$$1 < \frac{b_1}{1 + b_1} + \frac{b_2}{1 + b_2} + ... + \frac{b_{2014}}{1 + b_{2014}}$$

Ezt a részt is lezárhatjuk a következő becsléssel:

$$\frac{b_1}{1+b_1} + \frac{b_2}{1+b_2} + ... + \frac{b_{2014}}{1+b_{2014}} > \frac{b_{2l-1}}{1+b_{2l-1}} + \frac{b_{2l}}{1+b_{2l}} = \frac{2b_{2l-1}b_{2l} + b_{2l-1} + b_{2l}}{1+b_{2l-1}+b_{2l}+b_{2l-1}b_{2l}} \geq 1$$

2 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: A feladatban kitűzött egyenlőtlenség éles. A felső becslés esetén legyen $b_1 = b_2 = ... = b_{2013} = \epsilon$ és $b_{2014} = \epsilon^{-2013}$. Ekkor

$$\frac{1}{1+b_1} + \frac{1}{1+b_2} + ... + \frac{1}{1+b_{2014}} = \frac{2013}{1+\epsilon} + \frac{1}{1+\epsilon^{-2013}}$$

Ekkor

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{2013}{1+\epsilon} + \frac{1}{1+\epsilon^{-2013}} = 2013$$

Hasonló módon lehet az alsó becslésnél eljárni, csak ekkor ϵ tartson a végtelenhez.