A 2013/2014. tanévi Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny első forduló

MATEMATIKA

MATEMATIKA III. KATEGÓRIA

(a speciális tanterv szerint haladó gimnazisták)

Javítási-értékelési útmutató

Kérjük a javító tanárokat, hogy a feladatok javításakor vegyék figyelembe a versenyzők számára kiadott tájékoztatót. Külön is felhívjuk szíves figyelmüket arra, hogy minden feladatra csak egy helyes megoldásért jár a megfelelő pontszám. Kérjük, hogy a dolgozatokon konkrétan jelezzék a hibákat és az egyes feladatokra adott pontszámot, a dolgozat kijavítása után pedig töltsék ki a dolgozathoz mellékelt értékelő lap rovatait. A dolgozatokat nem kell osztályzattal minősíteni. A pontszámok indokolt esetben bonthatók.

A III. kategóriában versenyző tanulók dolgozatait 12 ponttól kell továbbküldeni az iskolákból, **közvetlenül** az OKTV Matematika III., Oktatási Hivatal, 1363 Budapest, Pf. 19. címre. A feltételeknek megfelelő dolgozatok közül azonban csak azok küldhetők tovább, amelyek tartalmazzák legalább két feladat lényegében teljes (5–7 pontos) megoldását. Tájékoztatásul megjegyezzük, hogy a versenykiírás alapján a Versenybizottság legfeljebb 50 versenyzőt juttathat be a döntőbe.

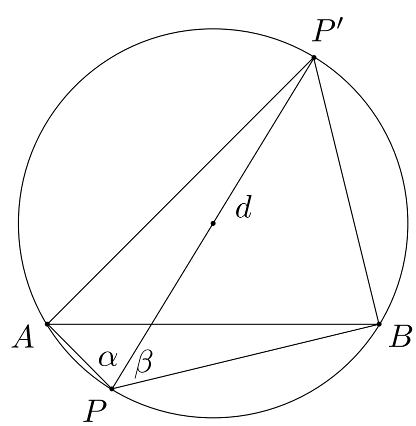
A pontozási útmutatóban nem szereplő más helyes megoldás vagy megoldásrészlet esetén az arányos pontszámot szíveskedjenek megadni.

Budapest, 2013. november — A versenybizottság

1. feladat

A P pont végigfut egy kör félkörnél rövidebb AB ívén. Legyen P' a P-vel átellenes pont a körön. Bizonyítsuk be, hogy $AP' \cdot BP' - AP \cdot BP$ állandó.

Első megoldás: Jelölje d a kör átmérőjét, α az APP' szöget, β pedig a BPP' szöget.



Thalész tétele szerint a PAP' háromszög A-nál, a PBP' háromszög B-nél derékszögű, ezért

$$AP' = d\sin\alpha, \quad BP' = d\sin\beta, \quad AP = d\cos\alpha \quad \text{és} \quad BP = d\cos\beta\,. \qquad \text{(3 pont)}$$

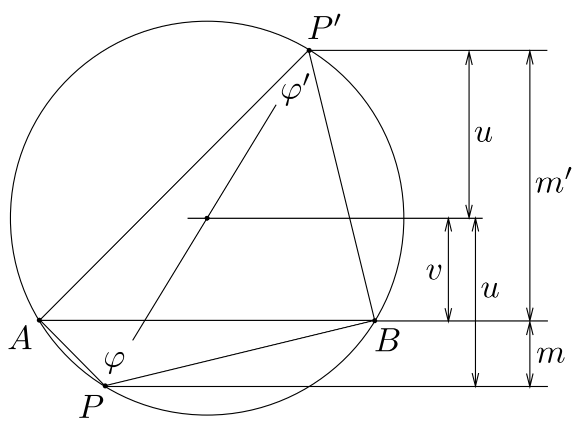
Ezekből

$$AP'\cdot BP' - AP\cdot BP = d^2(\sin\alpha\,\sin\beta - \cos\alpha\,\cos\beta) = -d^2\cos(\alpha+\beta)$$

következik. (2 pont)

Ez a mennyiség valóban állandó, mert a kerületi szögek tétele alapján az $\alpha+\beta$ szög nem függ P helyzetétől az AB íven. (2 pont)

Második megoldás: Jelölje φ az APB szöget, φ' az $AP'B$ szöget, továbbá m és m' a P, illetve a P' pont távolságát az AB egyenestől.



Írjuk föl az ABP és az ABP' háromszög területét kétféleképpen:

$$t_{ABP} = \frac{1}{2}\,AP\cdot BP\cdot\sin\varphi = \frac{1}{2}\,AB\cdot m$$

$$t_{ABP'} = \frac{1}{2}\,AP'\cdot BP'\cdot\sin\varphi' = \frac{1}{2}\,AB\cdot m' \qquad \text{(3 pont)}$$

Az $APBP'$ húrnégyszögben φ és φ' szemközti szögek, ezért $\sin\varphi = \sin\varphi'$. Ezt felhasználva

$$AP'\cdot BP' - AP\cdot BP = \frac{AB}{\sin\varphi}(m'-m)\,. \qquad \text{(2 pont)}$$

A φ szög nem függ P-től a kerületi szögek tétele miatt. Mivel P és P' átellenes pontok a körön, egyenlő u távolságra vannak az AB-vel párhuzamos átmérőtől. Ezért $m = u - v$ és $m' = u + v$, ahol v a középpont és az AB egyenes távolsága. Így $m' - m = 2v$ szintén nem függ P-től. (2 pont)

2. feladat
Hány N pozitív egészre teljesül, hogy $N/5$ egy egész szám hetedik, $N/7$ pedig egy egész szám ötödik hatványa?

Megoldás: Keressük N-et $N = 5^r 7^s v$ alakban, ahol $(v, 35) = 1$, és használjuk fel, hogy egy pozitív egész pontosan akkor k-adik hatvány, ha prímtényezős felbontásában minden prím kitevője a k-nak többszöröse. (1 pont)

Ekkor a feltétel szerint $N/5 = 5^{r-1}7^s v$ prímtényezős felbontásában minden kitevő osztható 7-tel, $N/7 = 5^r 7^{s-1} v$ prímtényezős felbontásában pedig minden kitevő osztható 5-tel. (2 pont)

Ez azt jelenti, hogy $r = 7a + 1 = 5b$, $s = 5c + 1 = 7d$, és v felbontásában minden prím kitevője 5-tel és 7-tel is, vagyis 35-tel osztható, tehát v egy egész szám 35-ödik hatványa. (2 pont)

Így megfelel például $r = 15$, $s = 21$, $v = m^{35}$ (ahol m és 35 relatív prímek), azaz $N = 5^{15}7^{21}m^{35}$, tehát végtelen sok N létezik. (2 pont)

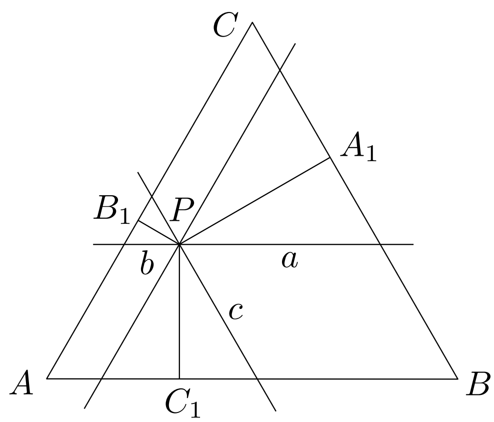
Megjegyzések: 1. A feladat megoldása akkor is teljes értékű, ha a versenyző megad végtelen sok N-et (például az $N = 5^{15}7^{21}m^{35}$ alakú számokat) annak részletezése nélkül, hogy ezeket hogyan találta meg, továbbá indokolja, hogy ezek valóban eleget tesznek a feladat követelményeinek.

2. Az is könnyen adódik, hogy az összes megoldás $N = 5^{15+35t}7^{21+35u}m^{35}$, ahol $(m, 35) = 1$, illetve egyszerűbb alakban $N = 5^{15}7^{21}M^{35}$, ahol M tetszőleges pozitív egész. Hasonlóan kezelhető a probléma, ha az 5 és 7 helyett két tetszőleges relatív prím szerepel. A relatív prímség feltétele nem hagyható el, például $N = 4x^{10} = 10y^4$ sohasem teljesül, mert a 2 kitevője a bal oldalon páros, a jobb oldalon viszont páratlan.

3. feladat
Legyen P az ABC szabályos háromszög belső pontja, továbbá A_1, B_1 és C_1 a P pont merőleges vetülete rendre a BC, CA, illetve AB oldalon. Bizonyítsuk be, hogy

$$AC_1 \cdot BA_1 + BA_1 \cdot CB_1 + CB_1 \cdot AC_1 = C_1B \cdot A_1C + A_1C \cdot B_1A + B_1A \cdot C_1B\,.$$

Első megoldás: Húzzunk a P ponton keresztül egyeneseket az ABC háromszög oldalaival párhuzamosan. Ezek a háromszöget földarabolják három kisebb szabályos háromszögre és három parallelogrammára. (2 pont)



Az A, B, C csúccsal szemközti kis szabályos háromszög oldalát jelöljük rendre a-val, b-vel, illetve c-vel. Ezek egyúttal a parallelogrammáknak is oldalhosszai, így

$$AC_1 = b + \frac{c}{2}\,, \quad BA_1 = c + \frac{a}{2}\,, \quad CB_1 = a + \frac{b}{2}\,,$$

$$C_1B = \frac{c}{2} + a\,, \quad A_1C = \frac{a}{2} + b\,, \quad B_1A = \frac{b}{2} + c\,. \qquad \text{(3 pont)}$$

Ezeket a bizonyítandó formulába helyettesítve beszorzás és rendezés után mindkét oldalon

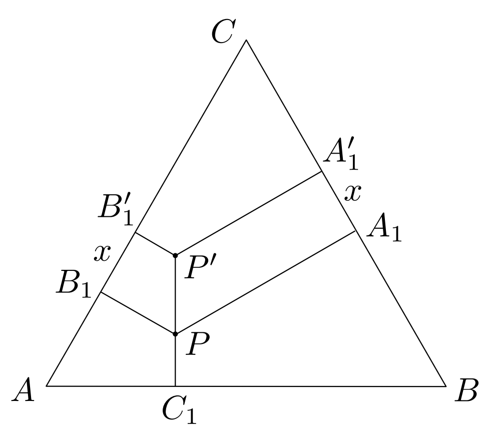
$$\frac{7}{4}(bc + ca + ab) + \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$$

adódik, tehát a két oldal egyenlő. (2 pont)

Második megoldás: A bizonyítandó egyenlőség abban az esetben nyilvánvalóan igaz, amikor P éppen a háromszög O középpontjával esik egybe, hiszen akkor a benne szereplő összes szakasz egyenlő hosszú.

Legyen most P és P' a háromszög két olyan belső pontja, amelyekkel a PP' egyenes a háromszög valamelyik oldalára merőleges. Bebizonyítjuk, hogy ha a feladat állítása igaz P és P' közül az egyikre, akkor a másikra is igaz. (2 pont)

Ebből már következik, hogy az állítás minden P-re igaz, ugyanis az O középpontból tetszőleges másik P belső pontba el tudunk jutni olyan elmozdítások egymásutánjával, amelyeknél a pont valamelyik oldalra merőleges irányban mozdul el. Valóban, ha O-ból egy adott P belső pontba akarunk eljutni, akkor P-ből húzzunk valamelyik oldalra merőleges egyenest, ez biztosan metszi a háromszög valamelyik szimmetriatengelyét egy P' belső pontban, és ekkor O-ból először P'-be lépve legfeljebb két lépésben eljutunk P-be. (1 pont)



Tegyük fel tehát, hogy PP' merőleges egy oldalegyenesre. Az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy $PP' \perp AB$, és hogy P' van távolabb AB-től. Legyenek A_1', B_1' és C_1' a P' merőleges vetületei az oldalakon, ekkor $C_1' = C_1$. Az AC és BC oldalegyenesek a PP' egyenessel egyenlő (30°-os) szöget zárnak be, ezért a PP' szakasz vetülete a két oldalon egyenlő. (1 pont)

Legyen $x = A_1A_1' = B_1B_1'$, ezzel a bizonyítandó egyenlőséget P'-re vonatkozóan így írhatjuk fel:

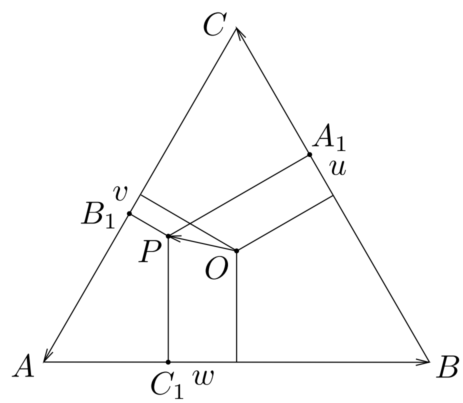
$$AC_1 \cdot (BA_1 + x) + (BA_1 + x) \cdot (CB_1 - x) + (CB_1 - x) \cdot AC_1 =$$
$$= C_1B \cdot (A_1C - x) + (A_1C - x) \cdot (B_1A + x) + (B_1A + x) \cdot C_1B$$

Beszorzás után az x-et nem tartalmazó tagok a P-re felírt egyenlőséget adják. Az x-et tartalmazó tagok részben kiesnek, a megmaradók pedig $(CB_1 - BA_1) \cdot x = (A_1C - B_1A) \cdot x$ alakban írhatók. Ez az egyenlőség valóban fennáll, hiszen $CB_1 + B_1A = BA_1 + A_1C$ a háromszög oldalhossza. Tehát a feladat állítása akkor és csak akkor igaz a P' pontra, ha P-re igaz. (3 pont)

Harmadik megoldás: Válasszuk a háromszög oldalát 2 egységnyinek, és jelöljük u-val, v-vel, w-vel az A_1, B_1, illetve C_1 pont előjeles távolságát a megfelelő oldal felezőpontjától, az előjelet a háromszög körüljárása irányában pozitívnak tekintve. Ekkor az $AC_1 = 1 + w$, $C_1B = 1 - w$ stb. formulákat fölhasználva a bizonyítandó egyenlőtlenség az

$$(1+w)(1+u)+(1+u)(1+v)+(1+v)(1+w) = (1-w)(1-u)+(1-u)(1-v)+(1-v)(1-w)$$

alakot ölti. Beszorozva és átrendezve azt kapjuk, hogy ez az egyenlőség pontosan akkor áll fönn, ha $u + v + w = 0$. (3 pont)



Azt kell tehát bebizonyítanunk, hogy $u + v + w = 0$. Ehhez tekintsük az $\overrightarrow{OP}$ vektort, ahol O az ABC háromszög középpontja, és vetítsük az oldalegyenesekre. Az u, v, w számok éppen a vetületek előjeles hosszával egyenlők, ezért előállíthatók $\overrightarrow{OP}$ és az oldalvektorok skaláris szorzatai segítségével:

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{BC} = u \cdot |\overrightarrow{BC}| = 2u\,,$$

és hasonlóan $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{CA} = 2v$, $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AB} = 2w$. Emiatt valóban

$$u + v + w = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{OP} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{OP} \cdot \mathbf{0} = 0\,. \qquad \text{(4 pont)}$$

4. feladat

Adott n ember között hányféle olyan ismeretségi kapcsolatrendszer lehet, hogy mindenki páratlan sok másikat ismer (az ismeretség kölcsönös)?

Megoldás: Az n nem lehet páratlan, mert akkor az összes ismeretség páratlan sok páratlan szám összegének a fele lenne, ami nem egész szám. (1 pont)

Páros n-re rögzítsünk egy tetszőleges E embert, és tekintsük a többi $n-1$ ember alkotta T társaságban az összes lehetséges ismeretségi kapcsolatrendszert (függetlenül attól, hogy egy adott embernek T-ben páros vagy páratlan sok ismerőse van). Hogy a feladat feltétele teljesüljön, egy $A \in T$ embert pontosan akkor tekintsünk az E ismerősének, ha A-nak T-ben páros sok ismerőse volt. (3 pont)

Ekkor E-nek is páratlan sok ismerőse lesz, hiszen T-n belül $(n-1)-$páros, azaz páratlan sok embernek volt páros sok ismerőse. (1 pont)

Így a keresett ismeretségi kapcsolatrendszerek száma ugyanannyi, mint T-ben az összes lehetséges ismeretségi kapcsolatrendszerek száma, ami $2^{\binom{n-1}{2}}$. (2 pont)

5. feladat

Legyenek $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n \le b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$ valós számok. Bizonyítsuk be, hogy

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n + b_1 + b_2 + \ldots + b_n)^2 \ge 4n(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n).$$

Első megoldás: Tekintsük az $f(x) = (x-a_1)(x-b_1) + \ldots + (x-a_n)(x-b_n)$ másodfokú polinomfüggvényt. (1 pont)

Ekkor a feltételek alapján $f(a_n)$ csupa nempozitív szorzat összege, tehát $f(a_n) \le 0$. (2 pont)

Mivel $f(x)$ főegyütthatója pozitív, ezért az előzőek alapján van valós gyöke. (2 pont)

Ebből következik, hogy a diszkriminánsa nemnegatív, ami átrendezve éppen a bizonyítandó egyenlőtlenséget adja. (2 pont)

Második megoldás: Először belátjuk, hogy ha az a_i, b_j számok mindegyikéhez ugyanazt a d valós számot adva az $a'_i = a_i + d$ és $b'_j = b_j + d$ számokat képezzük, akkor a bizonyítandó egyenlőtlenség egyformán érvényes vagy nem érvényes az a_i, b_j számokra, illetve az a'_i, b'_j számokra. (2 pont)

Valóban, az $S = a_1 + \ldots + a_n + b_1 + \ldots + b_n$ és $T = a_1b_1 + \ldots + a_nb_n$, illetve a hasonló S' és T' jelöléseket használva, és a feladatban szereplő $S^2 \ge 4nT$ egyenlőtlenséget föltéve

$$\begin{aligned} S'^2 &= (S+2nd)^2 = S^2 + 4ndS + 4n^2d^2 \ge \\ &\ge 4nT + 4ndS + 4n^2d^2 = 4n(T + dS + nd^2) = \\ &= 4n\left(\left(a_1b_1 + d(a_1+b_1) + d^2\right) + \ldots + \left(a_nb_n + d(a_n+b_n) + d^2\right)\right) = \\ &= 4nT', \end{aligned}$$

fordított szereposztással pedig a fordított irányú következtetés adódik. (3 pont)

Az a_i, b_j számok mindegyikéből ugyanazt az a_n és b_1 közötti számot levonva feltehetjük tehát, hogy az összes a_i nempozitív, és az összes b_j nemnegatív. Ilyenkor viszont a bizonyítandó egyenlőtlenség magától értetődik: a bal oldal nemnegatív, míg a jobb oldal nempozitív. (2 pont)