A 2014/2015. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
második forduló

MATEMATIKA

II. KATEGÓRIA
(GIMNÁZIUM)

Javítási–értékelési útmutató

1. Legyen n 2-nél nagyobb egész szám. Egy konvex n-szög három csúcsát kiválasztva $\frac{22}{35}$ annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott csúcsok által alkotott háromszögnek nincs közös oldala a sokszöggel. Határozzuk meg a sokszög oldalszámát.

Megoldás: A valószínűséget úgy számoljuk ki, hogy azon háromszögek számát, melyeknek nincs közös oldala a sokszöggel, elosztjuk az összes kiválasztható háromszög számával. 1 pont

A lehetséges n csúcs közül hármat kiválasztva összesen $\binom{n}{3}$ háromszöget kapunk.
1 pont

Az összes háromszög számából le kell vonnunk azokat, amelyeknek két oldala is az eredeti sokszögnek oldala. A két oldal közös csúcsa az ilyen háromszöget egyértelműen meghatározza és ez n-féle lehet, ezért ilyenből n van. Ha csak egy közös oldala van a háromszögnek és a sokszögnek, akkor a háromszög harmadik csúcsa $(n-4)$-féle lehet, így a következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{\binom{n}{3}-n-n(n-4)}{\binom{n}{3}}=\frac{22}{35}.$$ 2 pont

Mivel n nem lehet 0, a bal oldalon álló törtben n-nel egyszersíthetünk. Az egyenletet rendezve a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

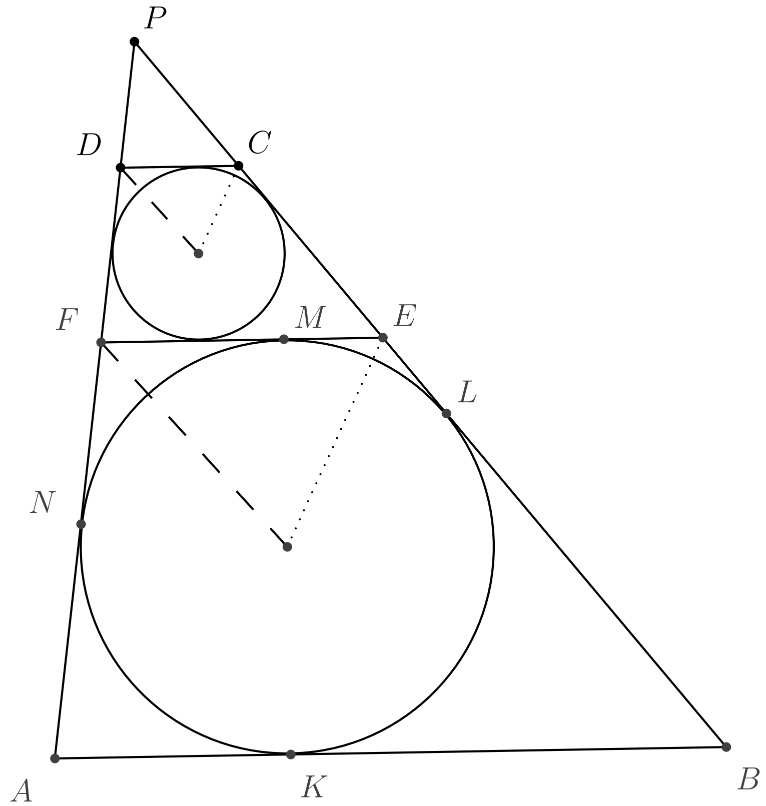
$$13n^2-249n+656=0.$$ 1 pont

A kapott egyenletnek egy pozitív egész megoldása van a 16, tehát a sokszög 16 oldalú.
2 pont

Összesen 7 pont

2. Egy trapézról tudjuk, hogy elmetszhető az alapokkal párhuzamos egyenessel úgy, hogy mindkét keletkezett rész-trapézba kör írható. A trapéz alapjai a, illetve b hosszúak. Mekkora a trapéz kerülete?

Megoldás: Az ábra jelöléseit használjuk, a trapéz kiegészítő háromszögének csúcsa legyen P. Megmutatjuk, hogy a $CDFE$ trapéz hasonló az $EFAB$ trapézhoz. Tekintsük azt a P középpontú nagyítást, ami CD-t EF-be viszi Ez a nagyítás az $FDC\angle$ szöget $AFE\angle$ szögbe viszi, tehát a D csúcsnál levő szögfelezőt az F csúcsnál levő szögfelezőbe. Ugyanez igaz C-nél és E-nél. Ebből következik, hogy az iménti nagyítás a $CDFE$ beírt körét az $EFAB$ beírt körébe viszi és így FE-t éppen AB-be. 3 pont



Legyen $EF = d$. A hasonlóság alapján $b : d = d : a$ és ebből $d = \sqrt{ab}$. 2 pont

Kihasználjuk, hogy külső pontból a körhöz húzott érintő szakaszok egyenlők $AK = AN$, $BK = BL$, $LE = EM$, $MF = FN$, így $FA + AB + BE = d + 2a$. Hasonlóan $FD + DC + CE = d + 2b$. A trapéz kerülete tehát

$$2a + 2b + 2d = 2(a + b + \sqrt{ab}).$$ 2 pont

Összesen 7 pont

3. Egy tudományos kutatásban n tudós dolgozik együtt. Bármely két tudós előre megállapodik, hogy egymás közt milyen nyelven leveleznek a kutatás négy hivatalos nyelve

közül. A levelezés oda-vissza ugyanazon a nyelven történik két tudós között. Egy tudóst akkor nevezünk szervezőnek, ha legalább 4 másikkal ugyanazon a nyelven levelezik. Legfeljebb mekkora lehet n, ha nincs köztük szervező?

Megoldás: Legyenek a tudósok egy gráf pontjai, a pontok közti éleket négy színnel színezzük a szerint, hogy a pontoknak megfelelő tudósok közti levelezésben melyik nyelvet használják. 1 pont

Mivel nincs szervező, ezért minden pontból mind a négy fajta színből legfeljebb három él indulhat, ezért minden pont foka legfeljebb 12, azaz n legfeljebb 13. 1 pont

Ha $n = 13$ lehetséges lenne, akkor minden egyes pontból mind a négy színből éppen 3 él indulna. Ekkor csak az egyik színt vizsgálva 13 darab harmadfokú pont lenne, így 39 végpontja lenne ezen éleknek. Másrészt minden élnek két vége van, így a vizsgált színű összes él végpontjainak száma páros kell legyen. Ebből következik, hogy $n = 13$ nem lehet. 2 pont

Megmutatjuk, hogy $n = 12$ lehetséges, így ez a feladat kérdésére a válasz. Legyen a 12 pont A_1, A_2, A_3, A_4; B_1, B_2, B_3, B_4; C_1, C_2, C_3, C_4. Az A betűs pontok közti élek legyenek pirosak, a B jelűek közt kékek, a C jelűek közt sárgák. Ha két pont betűjele különböző, de száma azonos, akkor legyen a köztük futó él zöld. Ha $i \neq j$, akkor az A_i és B_j pontok közti él legyen sárga, az A_i és C_j közti él kék, a B_i és C_j közti él piros. Így minden pontból két zöld él indul, a piros, kék és sárga mindegyikéből pedig három.

3 pont

Összesen 7 pont

4. Határozzuk meg, mely pozitív egész a, b, c számokra teljesül az alábbi egyenlet:

$$a! \cdot b! = a! + b! + c! \tag{1}$$

Megoldás: Feltehető, hogy $a \leq b$. (1)-et átrendezve és szorzattá alakítva a következőt kapjuk:

$$(a! - 1)(b! - 1) = c! + 1. \tag{2}$$

Nem lehet $a = 1$, mert akkor (2) bal oldala 0, míg a jobb oldala pozitív. Nem lehet $a = 2$ sem, mert akkor $b! = c! + 2$, aminek nincs megoldása. A továbbiakban $a > 2$. 1 pont

(i) Tegyük fel, hogy $a < b$. (1)-et vizsgálva $a!$ osztja a bal oldalt és a jobb oldali összeg első két tagját, tehát $a!$ osztja $c!$-t, amiből $a \leq c$ következik.

1 pont

Ha $a = c$, akkor (1)-et $a!$-sal osztva

$$b! = 2 + \frac{b!}{a!} \tag{3}$$

adódik, amiből $a < b$ miatt következik, hogy $a + 1$ osztja (3) bal oldalát és a jobb oldal második tagját, így a 2-t is, ami $a > 2$ miatt nem lehet. 1 pont

Ha $a < c$, akkor (1)-et $a!$-sal osztva a következőt kapjuk

$$b! = 1 + \frac{b!}{a!} + \frac{c!}{a!}.$$

A bal oldal osztható $a+1$-gyel, a jobb oldal második és harmadik tagja is, így az 1 is, ami $a>2$ miatt nem lehet. 1 pont

(ii) Hátra van az az eset, ha $a=b$. (1)-et $a!$-sal osztva

$$a! = 2 + \frac{c!}{a!} = 2 + (a+1)(a+2)...c, \tag{4}$$

ahol a bal oldal osztható 3-mal, a jobb oldalon a 2 nem osztható, tehát a jobb oldal második tagjának 3-as maradéka 1. Ez a tag, azaz $(a+1)(a+2)...c$, nem lehet kettő, vagy több tényezős, mert ekkor 3-as maradéka 0 vagy 2. 2 pont

Tehát $c=a+1$, ekkor (4) így néz ki: $a! = 2+a+1$ aminek egyetlen megoldása az $a=3$. A kitűzött (1)-es egyenletnek egyetlen (a,b,c) számhármas tesz eleget és ez a (3,3,4). 1 pont

Összesen 7 pont