Oktatási Hivatal

A 2014/2015. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
döntő forduló

MATEMATIKA III. KATEGÓRIA
(a speciális tanterv szerint haladó gimnazisták)

FELADATOK

1. A k körhöz egy külső ponton keresztül egy e szelőt és két érintőt húzunk, az utóbbiak érintési pontjai A és B. Az A ponton áthaladó, e-vel párhuzamos egyenes az A-tól különböző C pontban is metszi k-t. Bizonyítsuk be, hogy a BC egyenes felezi e-nek a k-ba eső szakaszát.

2. Tegyük fel, hogy nemnegatív egész számoknak egy véges $A = \{a_1 < < a_2 < \ldots < a_k\}$ és egy végtelen $B = \{b_1 < b_2 < \ldots\}$ halmazára teljesül, hogy minden nemnegatív egész egyértelműen előáll $a_i + b_j$ alakban. Mutassuk meg, hogy ekkor B szükségképpen „tisztán periodikus", azaz létezik olyan $c > 0$, hogy bármely b nemnegatív egész szám pontosan akkor eleme B-nek, ha $b + c$ is az.

3. Melyek azok az egész együtthatós f polinomok, amelyekre minden $j \geq 1$ esetén $f(2^j)$ pozitív prímhatvány?