



Oktatási Hivatal

A 2015/2016. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
első forduló

MATEMATIKA

II. KATEGÓRIA
(GIMNÁZIUM)

Javítási-értékelési útmutató

1. Adottak az 1, 2, 3, ..., 2015 grammos súlyok. Be lehet-e osztani őket öt csoportba úgy, hogy a súlyok száma és az összege is azonos legyen minden csoportban?

Megoldás: Megmutatjuk, hogy a feladat feltételeinek megfelelő csoportok létrehozhatóak. A súlyokra a rájuk írt számokkal hivatkozunk. Először tekintsük az 1, 2, 3, ..., 15 számokat. Ezek egy lehetséges beosztása:

$$15 + 7 + 2 = 14 + 6 + 4 = 13 + 1 + 10 = 12 + 9 + 3 = 11 + 8 + 5$$

Minden csoportban három szám van, mindegyikben 24 a számok összege és minden számot pontosan egyszer használtunk fel. 3 pont

Megmutatjuk, hogy tíz szomszédos egész szám is csoportokba osztható a kívánt módon. Legyenek a számok $n, n + 1, \dots, n + 9$, a csoportok pedig:

$$n + (n + 9) = (n + 1) + (n + 8) = (n + 2) + (n + 7) = (n + 3) + (n + 6) = (n + 4) + (n + 5).$$

2 pont

A 2015 súly beosztása történhet a következőképpen: az első 15 számot szétszétjük a megadott módon, majd sorra vesszük tízesével a számokat és szétszétjük őket a fent megadottak szerint a meglévő csoportokba. Így minden szám sorra kerül, hiszen $2015 = 15 + 200 \cdot 10$. 2 pont

Összesen 7 pont

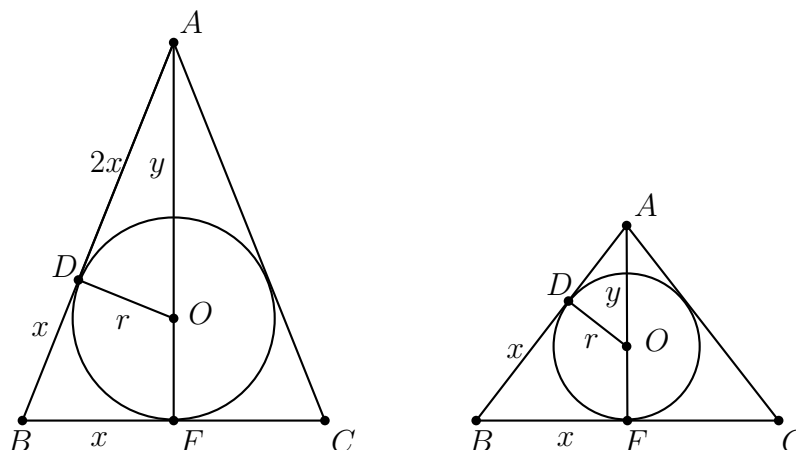
2. Két egyenlő szárú háromszöget vizsgálunk. Az elsőnél a háromszög beírt köre a szárazakat az alaphoz közelebbi harmadolópontban érinti, a másodiknál az alaptól távolabbi harmadolópontban. Melyik esetben fedi a beírt kör a háromszög területének nagyobb hányadát?

Megoldás: Legyen a háromszög alapja BC , ennek felezőpontja F , a beírt kör középpontja O , sugara r , a beírt körnek az AB száron levő érintési pontja D . Legyen $OA = y$, $BF = x$. Külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlők, így $BF = BD = x$.

1 pont

Az OAD háromszög hasonló BAF háromszöghöz, hiszen A -nál levő szögük közös és D -nél illetve F -nél derékszög van, így szögeik ugyanakkorák.

1 pont



Először tekintsük azt az esetet, amikor $BD : DA = 1 : 2$, azaz $AD = 2x$. Az említett hasonló háromszögek megfelelő oldalainak aránya megegyezik, tehát

$$y : 3x = r : x \Rightarrow y = 3r.$$

Írjuk fel a Pitagorasz tételt az OAD háromszögre:

$$r^2 + (2x)^2 = y^2 = (3r)^2 \Rightarrow x = \sqrt{2} \cdot r. \quad 1 \text{ pont}$$

A beírt kör területe $T_1 = r^2 \cdot \pi$. A háromszög területe $T_2 = x \cdot (r + y) = \sqrt{2}r \cdot (r + 3r) = 4\sqrt{2}r^2$. A kör és a háromszög területének aránya:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{r^2 \cdot \pi}{4\sqrt{2}r^2} \approx 0.5554. \quad 2 \text{ pont}$$

Most tekintsük azt az esetet, amikor $BD : DA = 2 : 1$, azaz $AD = \frac{x}{2}$. Az előző gondolatmenet lépései mentén: a hasonló háromszögekből $y = \frac{3}{2}r$, a Pitagorasz tételből $x = \sqrt{5}r$. A háromszög területe ebben az esetben $T_3 = x(r + y) = \sqrt{5}r(r + \frac{3}{2}r) = \frac{5\sqrt{5}}{2}r^2$. A kör és a háromszög területének aránya ebben az esetben :

$$\frac{T_1}{T_3} = \frac{r^2 \cdot \pi}{\frac{5\sqrt{5}}{2}r^2} \approx 0.562 \quad 2 \text{ pont}$$

A második esetben fedi a beírt kör a háromszög területének nagyobb hányadát.

Összesen 7 pont

3. A pozitív egész számok körében négy egymást követő páratlan szám négyzetének az összegét vizsgáljuk. Hány ilyen számnégyes van 1 és 100 között, amelyeknél ez a négyzetösszeg 36-tal osztható?

Megoldás: A szóban forgó számok jelöléseit úgy választjuk, hogy négyzetösszegük viszonylag egyszerű kifejezés legyen. Tehát a számok:

$$2n - 3, \quad 2n - 1, \quad 2n + 1, \quad 2n + 3.$$

Ezek négyzetösszege

$$(2n - 3)^2 + (2n - 1)^2 + (2n + 1)^2 + (2n + 3)^2 = 16n^2 + 20 = 4(4n^2 + 5). \quad 1 \text{ pont}$$

Ez akkor és csakis akkor osztható $36 = 4 \cdot 9$ -cel, ha $4n^2 + 5$ osztható 9-cel. Viszont

$$4n^2 + 5 = 4n^2 + 5 + 4 - 4 = 4(n^2 - 1) + 9 = 4(n + 1)(n - 1) + 9,$$

ez pedig akkor osztható 9-cel, ha $(n + 1)(n - 1)$ is osztható. 2 pont

$n + 1$ és $n - 1$ különbsége 2, ezért csak egyikük lehet 3-mal osztható, ezért $(n + 1)(n - 1)$ csak akkor osztható 9-cel, ha a tényezők valamelyike osztható, ha tehát $n + 1 = 9k$ vagy $n - 1 = 9k$ (k pozitív egész), azaz

$$n = 9k - 1 \quad \text{vagy} \quad n = 9k + 1. \quad 2 \text{ pont}$$

Az első esetben a számnégyes kezdő száma $18k - 5$ alakú, a feladat feltételének a 13, 31, 49, 67, 85 kezdőszámok felelnek meg. A második esetben a kezdő szám alakja $18k - 1$, a feltételeknek a 17, 35, 53, 71, 89 kezdőszámok tesznek eleget, tehát összesen 10 számnégyes elégíti ki a feltételeket. 2 pont

Összesen 7 pont

4. A 11.a osztály sakkozni szerető diákjai körmérkőzéses sakkturnát rendeztek egymás között. Mindenki mindenkivel egyszer játszott. Az eredmények érdekesen alakultak: a résztvevők közül bármely kettőhöz van legalább egy olyan, akit mindketten legyőztek a tornán. Legalább hányan szeretnek sakkozni a 11.a-ban?

Megoldás: Tekintsük az egyik versenyzőt, legyen A . Van olyan, akit legyőzött, legyen közülük az egyik B . Van olyan, akit A és B is legyőzött, legyen C . Van, akit A és C is legyőzött, ez nem lehet B , legyen D . Azt kaptuk, hogy tekintve egy tetszőleges versenyzőt, esetünkben A -t, található hozzá három olyan másik, akiket legyőzött. Ezek voltak A -hoz B , C és D . 2 pont

Így n résztvevő esetén legalább $3n$ mérkőzés volt. Másrészt a mérkőzések száma összesen $\frac{n(n-1)}{2}$, azaz

$$3n \leq \frac{n(n-1)}{2},$$

amiből az adódik, hogy a résztvevők száma legalább 7. 2 pont

7 résztvevő esetén megadhatóak az eredmények a feladat feltételeinek megfelelően. Ül-tessük le a 7 embert egy kerek asztal köré és mindenki győzze le a jobb oldali szomszédját, a jobb oldali másodsomszédját és a bal oldali harmadszomszédját. Ha a versenyzők a

kör mentén sorban A, B, C, D, E, F és G , akkor pl. A legyőzte B -t, C -t és E -t, a többi mérkőzés ennek mintájára forgásszimmetrikusan adódik. Ha két ember szomszédos, pl A és B , akkor mindketten legyőzték C -t. Ha másodsomszédosak, pl A és C , akkor mindketten legyőzték E -t. Ha harmadszomszédosak, pl A és D , akkor mindketten legyőzték E -t. A forgásszimmetria miatt minden lehetőséget végignéztünk, valóban teljesülnek a feladat feltételei.

3 pont

Összesen 7 pont

Megjegyzés: Ha a dolgozatban 7 sakkzó esetén más módon (pl táblázat, gráf, stb) megadja az eredményeket, de nem ellenőrzi, hogy teljesülnek a feladat feltételei, akkor legfeljebb 6 pont adható.

5. Oldjuk meg a következő egyenletet, ha x 2-nél nagyobb természetes szám:

$$\sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2}} = \frac{2015 \cdot (2x+1)}{2x}.$$

Megoldás: A bal oldalon az első gyökjel alatti szám $\frac{49}{36}$, amiből kényelmesen gyököt lehet vonni.

1 pont

Vizsgáljuk a bal oldal egy általános tagját:

$$\sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} = \sqrt{\frac{n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n + 1}{n^2(n+1)^2}} = \sqrt{\left(\frac{n^2 + n + 1}{n(n+1)}\right)^2}$$

2 pont

A gyökvonást elvégezve és tovább alakítva:

$$\sqrt{\left(\frac{n^2 + n + 1}{n(n+1)}\right)^2} = \frac{n^2 + n + 1}{n(n+1)} = 1 + \frac{1}{n(n+1)} = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

2 pont

Ekkor egyenletünk így írható fel:

$$\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right) = \frac{2015 \cdot (2x+1)}{2x}.$$

A bal oldali összeg úgynevezett teleszkópikus összeg, rendezés után megmarad belőle $x-2$ darab 1-es, a törtek közül pedig az $+\frac{1}{2}$ és a $-\frac{1}{x}$. Így egyenletünk:

$$x - 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{x} = \frac{2015 \cdot (2x+1)}{2x}.$$

Mivel $x > 2$ beszorozhatunk $2x$ -szel és így a

$$(2x+1)(x-2) = 2015(2x+1)$$

egyenlethez jutunk, amelynek az $x > 2$ feltételt kielégítő egyetlen gyöke az $x = 2017$.

2 pont

Összesen 7 pont