A 2015/2016. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
második forduló

MATEMATIKA

II. KATEGÓRIA
(GIMNÁZIUM)

Javítási–értékelési útmutató

1. Legyen n pozitív egész szám és jelölje $n!!$ az n-nél nem nagyobb, vele azonos paritású pozitív egész számok szorzatát. Igazoljuk, hogy $2016!! - 2015!!$ osztható 2017-tel.

Megoldás:

$$2016!! - 2015!! = 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2016 - 1 \cdot 3 \cdot \ldots. \cdot 2015$$

$$2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2016 - 1 \cdot 3 \cdot \ldots. \cdot 2015 = (2017-2015)(2017-2013)\ldots(2017-1) - 1 \cdot 3 \cdot \ldots. \cdot 2015$$

Ha felbontjuk a zárójeleket a $(2017-2015)(2017-2013)\ldots(2017-1)$ kiszámolásánál, akkor szinte minden tagban szerepel a 2017, mint szorzótényező, így ezek a 2017-es oszthatóságot nem befolyásolják, jelölje ezen tagok értékét $2017N$. 4 pont

Az egyetlen tag, amelyben nem szerepel a 2017 pedig a $(-2015)(-2013)\ldots(-1)$, amelyben páros sok tényező van ezért $(-2015)(-2013)\ldots(-1) = 2015!!$. Így

$$2016!! - 2015!! = 2017N$$

és ezzel az állítást igazoltuk. 3 pont

Összesen 7 pont

2. Mekkora lehet az x és y egész számok szorzata, ha

$$(6x)_5 + 4y = 508, \quad \text{és} \quad (6y)_5 - (2x)_7 = 64,$$

ahol az m és k egész számokra $(m)_k$ értéke k-nak az m-hez legközelebbi többbese.

Megoldás: Az első egyenletben $(6x)_5$ 5-nek többese, ezért $4y$ és 508 5-ös maradéka azonos, éppen 3. Végignézve y 5-ös maradékai szerint $4y$ 5-ös maradékát azt kapjuk, hogy y csak 2 maradékot adhat. 1 pont

Legyen $y = 5k + 2$. Ekkor a második egyenletben szereplő $6y = 30k + 12$ és így $(6y)_5 = 30k + 10 = 6y - 2$. 1 pont

Most y kiküszöbölése érdekében az első egyenletet szorozzuk 3-mal a másodikat 2-vel:

$$3 \cdot (6x)_5 + 12y = 1524, \quad \text{és} \quad 2\left((6y)_5 - (2x)_7\right) = 12y - 4 - 2 \cdot (2x)_7 = 128.$$

Az első egyenlet bal illetve jobb oldalából kivonva a második egyenlet megfelelő oldalát kapjuk:

$$3 \cdot (6x)_5 + 2 \cdot (2x)_7 = 1392$$ 2 pont

A feladatban szereplő $(m)_k$ jelölés páratlan k számok esetén egyértelmű. Legyen $k = 2K + 1$, ekkor a definícióból adódóan $m - K \leq (m)_k \leq m + K$. Így

$$3 \cdot (6x - 2) + 2 \cdot (2x - 3) \leq 1392 \leq 3 \cdot (6x + 2) + 2 \cdot (2x + 3)$$

$$22x - 12 \leq 1392 \leq 22x + 12$$

A kapott egyenlőtlenségből $x \leq \frac{1404}{22}$ és $\frac{1380}{22} \leq x$ ezeknek pedig egyetlen közös egész megoldása van, az $x = 63$. 2 pont

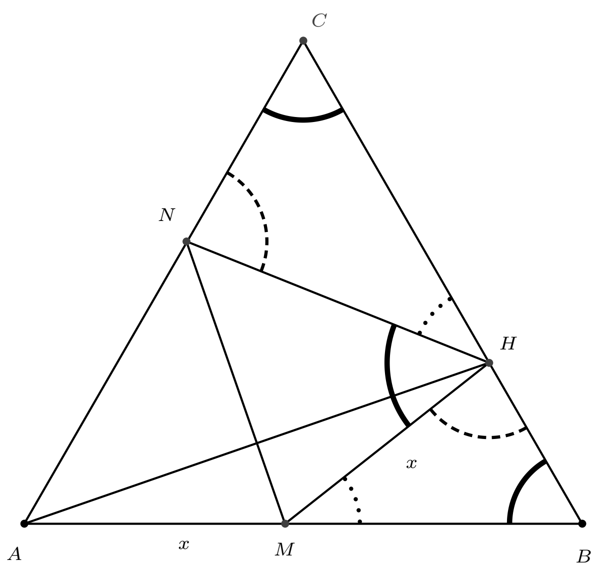
Ezt behelyettesítve a feladatban szereplő első egyenletbe kapjuk, hogy $y = 32$. Ellenőrizve, az egyetlen lehetséges megoldáspár az $x = 63$ és $y = 32$ és ezek valóban kielégítik mindkét egyenletet, szorzatuk pedig $xy = 2016$.

1 pont

Összesen 7 pont

3. Az ABC szabályos háromszöget behajtjuk úgy, hogy az A csúcs a BC oldal B-hez közelebbi H harmadoló pontjába essen. A hajtási vonalnak az AB illetve az AC oldalakkal vett metszéspontja legyen M illetve N. Határozzuk meg a BHM háromszög és a CNH háromszög területének arányát.

Megoldás: Legyen az ABC háromszög oldala 1 egység hosszú. Legyen $AM = x$, ekkor $BM = 1 - x$. A papír összehajtása azt jelenti, hogy az MN egyenesre A és H egymás tükörképei és így $AM = HM$. 1 pont



Felírjuk a BHM háromszögre a koszinusz tételt:

$$x^2 = (1-x)^2 + \frac{1}{9} - 2(1-x)\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}.$$

Ebből $x = \frac{7}{15}$. 2 pont

Mivel $BAC\angle = MHN\angle = 60°$, ezért a BHM háromszög hasonló a CNH háromszöghöz. Mindkettőben B-nél és C-nél $60°-$os szög van és $BMH\angle = CHN\angle$, továbbá $BHM\angle = CNH\angle$. 2 pont

Ebből adódik a két háromszög területének aránya, hiszen az a hasonlóság arányának négyzete, azaz

$$\frac{T_{BHM}}{T_{CNH}} = \left(\frac{BM}{CH}\right)^2 = \left(\frac{\frac{8}{15}}{\frac{2}{3}}\right)^2 = \frac{16}{25}.$$

2 pont

Összesen 7 pont

Megjegyzés: A feladat több úton is megoldható. Megadunk egy pontozási útmutatót a fentinél kevésbé ötletes gondolatmenet esetén is. A számolásaink kényelme érdekében most BH-t választjuk egységnyinek, így ABC oldalai 3 egység hosszúak. Legyen továbbá az AH szakasz felezpontja F. Felírjuk a koszinusz tételt az ABH háromszög AH oldalára:

$$AH^2 = BH^2 + BA^2 - 2BH\cdot BA\cos 60° = 1+9-2\cdot 3\cdot\frac{1}{2} = 7$$ 1 pont

Ugyanebben a háromszögben koszinusz tétellel meghatározzuk $\cos BAH\angle$ értékét:

$$\cos BAH\angle = \frac{AB^2+AH^2-BH^2}{2AB\cdot AH} = \frac{9+7-1}{2\cdot 3\cdot\sqrt{7}} = \frac{5}{2\sqrt{7}}$$ 1 pont

Meghatározzuk AM értékét, $\frac{AF}{AM} = \cos BAH\angle$ azaz

$$AM = \frac{AH}{2} : \cos BAH\angle = \frac{7}{5}.$$ 1 pont

A BHM háromszög területét kiszámolhatjuk

$$T_{BHM} = \frac{BM\cdot BH\cdot\sin 60°}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{5}.$$ 1 pont

Hasonló gondolatmenettel $\cos CAH\angle = \frac{2}{\sqrt{7}}$, $AN = \frac{7}{4}$ és így

$$T_{CNH} = \frac{5\sqrt{3}}{8}.$$ 1 pont

A feladatban kitűzött kérdésre a válasz

$$\frac{T_{BHM}}{T_{CNH}} = \frac{16}{25}.$$ 2 pont

4. Határozzuk meg azokat a pozitív p prímszámokat, amelyekre az alábbi tört értéke négyzetszám:

$$\frac{2^{p-1}-1}{p}.$$

Megoldás: Kipróbálva a 2, 3, 5 prímeket, a vizsgált tört értéke $\frac{1}{2}$, 1 és 3. Ezek közül csak az 1 négyzetszám, tehát a $p = 3$ megoldás. 1 pont

A továbbiakban legyen $p > 3$ és tegyük fel, hogy a tört értéke n^2. Ekkor $2^{p-1}-1 = pn^2$. Mivel $p > 3$, így p páratlan és a bal oldal szorzattá alakítható:

$$\left(2^{\frac{p-1}{2}}-1\right)\left(2^{\frac{p-1}{2}}+1\right) = pn^2.$$

1 pont

Mivel $p > 3$ és páratlan, ezért a bal oldalon álló szorzat mindkét tényezője páratlan, különbségük pedig 2. Ebből következik, hogy relatív prímek. Mivel szorzatuk pn^2, ezért létezik két pozitív egész a és b, amelyekre $(a; b) = 1$, $ab = n$ és az előbb említett szorzat egyik tényezője a^2, a másik pedig pb^2. 1 pont

Mivel $p > 3$, ezért $2^{\frac{p-1}{2}} - 1$ 4-es maradéka 3, négyzetszám 4-es maradéka viszont csak 0, vagy 1 lehet. Így már csak egy szereposztás maradt:

$$2^{\frac{p-1}{2}} - 1 = pb^2 \quad \text{és} \quad 2^{\frac{p-1}{2}} + 1 = a^2. \qquad \text{1 pont}$$

Ha p 4-es maradéka 1, akkor $\frac{p-1}{2}$ páros szám és így $a^2 = 2^{\frac{p-1}{2}} + 1$ 3-as maradéka 2. Mivel négyzetszám 3-as maradéka nem lehet 2, ezért p 4-es maradéka sem lehet 1. 1 pont

A továbbiakban legyen $p = 4k + 3$. Ezt beírjuk a korábban kapott $2^{\frac{p-1}{2}} + 1 = a^2$ összefüggésbe:

$$2^{2k+1} + 1 = a^2 \quad \to \quad 2^{2k+1} = a^2 - 1 = (a + 1)(a - 1).$$

Mivel $(a+1)(a-1)$ 2 hatványa, ezért $a+1$ és $a-1$ is 2 hatványa. Mivel $(a+1)-(a-1) = 2$ és a 2 hatványai között csak egyetlen esetben lesz a különbség 2, ezért egyetlen szóba jöhető megoldás maradt, ha $a + 1 = 4$ és $a - 1 = 2$. Ebből $2^{2k+1} = (a + 1)(a - 1) = 8$, $k = 1$ és $p = 4k + 3 = 7$. 2 pont

A feladat feltételeinek két prímszám felel meg, a 3 és a 7.

Összesen 7 pont