Oktatási Hivatal

A 2015/2016. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
harmadik, döntő forduló

MATEMATIKA II. KATEGÓRIA
(GIMNÁZIUM)

FELADATOK

1. Jelölje a pozitív egész k utolsó jegyét $u(k)$, például $u(2016) = 6$. Egy számsorozat tagjainak képzési szabálya a következő: a pozitív egész a_0 adott, továbbá $n > 0$ esetén

$$a_n = a_{n-1} + u(a_{n-1}) - 1.$$

Milyen a_0 számok esetén tartalmaz a sorozat végtelen sok 3-hatványt?

2. A négyzetrácson adott az $ABCD$ konvex rácsnégyszög úgy, hogy mind a négy csúcsa, mind pedig átlóinak M metszéspontja rácspont (azaz olyan pont, melynek mindkét koordinátája egész). Jelölje t az $ABCD$ négyszög, t_1 pedig az ABM háromszög területét. Igazoljuk az alábbi egyenlőtlenséget és állapítsuk meg, mikor lehet egyenlőség:

$$\sqrt{t} \geq \sqrt{t_1} + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3. Egy társaság n tagból áll, közülük néhányan ismerik egymást, az ismeretség kölcsönös. Bármely két, egymást nem ismerő embernek pontosan két közös ismerőse van. Amennyiben két ember ismeri egymást, nekik nincs közös ismerősük. Igazoljuk, hogy a társaság minden tagjának ugyanannyi ismerőse van.

Valamennyi feladat 7 pontot ér.