A 2015/2016. tanévi Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny első forduló

MATEMATIKA III. KATEGÓRIA

(a speciális tanterv szerint haladó gimnazisták)

Javítási-értékelési útmutató

Kérjük a javító tanárokat, hogy a feladatok javításakor vegyék figyelembe a versenyzők számára kiadott tájékoztatót. Külön is felhívjuk szíves figyelmüket arra, hogy minden feladatra csak egy helyes megoldásért jár a megfelelő pontszám. Kérjük, hogy a dolgozatokon konkrétan jelezzék a hibákat és az egyes feladatokra adott pontszámot, a dolgozat kijavítása után pedig töltsék ki a dolgozathoz mellékelt értékelő lap rovatait. A dolgozatokat nem kell osztályzattal minősíteni. A pontszámok indokolt esetben bonthatók.

A III. kategóriában versenyző tanulók dolgozatait 12 ponttól kell továbbküldeni az iskolákból, **közvetlenül** az OKTV Matematika III., Oktatási Hivatal, 1363 Budapest, Pf. 19. címre. A feltételeknek megfelelő dolgozatok közül azonban csak azok küldhetők tovább, amelyek tartalmazzák legalább két feladat lényegében teljes (5–7 pontos) megoldását. Tájékoztatásul megjegyezzük, hogy a versenykiírás alapján a versenybizottság legfeljebb 50 versenyzőt juttathat be a döntőbe.

A pontozási útmutatóban nem szereplő más helyes megoldás vagy megoldásrészlet esetén az arányos pontszámot szíveskedjenek megadni.

Budapest, 2015. november — A versenybizottság

1. feladat

Mely ABC háromszögekhez léteznek olyan e és f egyenesek, hogy az A pontot e-re, majd a kapott pontot f-re tükrözve B-t kapjuk, viszont az A-t előbb f-re, majd a kapott pontot e-re tükrözve C-t kapjuk?

Megoldás: Tegyük fel először, hogy az ABC háromszöghöz találhatók ilyen egyenesek. A két egyenes nem lehet párhuzamos, hiszen akkor A, B és C kollineáris volna. (1 pont)

Legyen M az e és f metszéspontja. Az egymás után végzett két tükrözés M körüli elforgatással helyettesíthető, amelynek az irányát a két tükrözés sorrendje határozza meg: fordított sorrend esetén ellentétes irányú forgatást kapunk ugyancsak az M középpont körül. A forgatás szöge mindkét esetben ugyanakkora (történetesen az e és f által bezárt szög kétszeresével egyenlő). (2 pont)

Az A pontból B-t, illetve C-t M körüli ugyanakkora szögű forgatások származtatják, ezért $AB = AC$. Az ABC háromszög tehát olyan egyenlő szárú háromszög, amelynek BC az alapja. (2 pont)

Megfordítva, ha az ABC háromszögben $AB = AC$ teljesül, akkor e-nek és f-nek választhatjuk például a háromszög A-n áthaladó szimmetriatengelyét, illetve az AB oldal felező merőlegesét. (2 pont)

2. feladat

Milyen alapú számrendszer esetén létezik olyan 1-nél nagyobb pozitív egész, amely megegyezik a számjegyei összegének a négyzetével?

Megoldás:A 10-es számrendszerben a 81 szám ilyen, mert $81 = (8 + 1)^2$. (1 pont)
Ezt bármely $b \geq 3$ alapú számrendszerre általánosíthatjuk: a $b - 2$ és 1 számjegyekből álló kétjegyű $b(b - 2) + 1 = (b - 1)^2$ szám jó, hiszen $\overline{(b - 2)1}_b = (b - 2)b + 1 = ((b - 2) + 1)^2$. (2 pont)
Megmutatjuk, hogy kettes alapú számrendszerben nincs ilyen szám, erre többféle meggondolást is adunk. Mindegyikben indirekt módon feltesszük, hogy egy k-jegyű $n > 1$ számban S darab 1-es jegy szerepel és $n = S^2$.

(i) Egy négyzetszám 8-cal osztva csak 0, 1 vagy 4 maradékot adhat, ezért n utolsó három jegye 000, 001 vagy 100. (1 pont)
Ez azt jelenti, hogy n-ben az egyesek száma legfeljebb $k-2$, és így $2^{k-1} \leq n = S^2 \leq (k-2)^2$. (1 pont)
Ez azonban nem lehet, mert teljes indukcióval belátjuk, hogy minden $j = k - 2 \geq 0$-ra $2^{j+1} > j^2$: ez $j \leq 3$-ra igaz, és $j \geq 3$-ról $j + 1$-re lépve a bal oldal a duplájára nő, a jobb oldal pedig az $(1 + \frac{1}{j})^2 \leq (1 + \frac{1}{3})^2 < 2$-szeresére. (2 pont)

(ii) $S^2 = n \geq 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{S-1} = 2^S - 1$. (1 pont)
Az előző részben látottakhoz hasonlóan teljes indukcióval adódik, hogy ez $S \geq 5$-re nem teljesül. (2 pont)
Így csak $S \leq 4$, azaz $n = S^2 = 16, 9, 4$ jöhet szóba, azonban ezek sem teljesítik az $n = S^2$ feltételt. (1 pont)

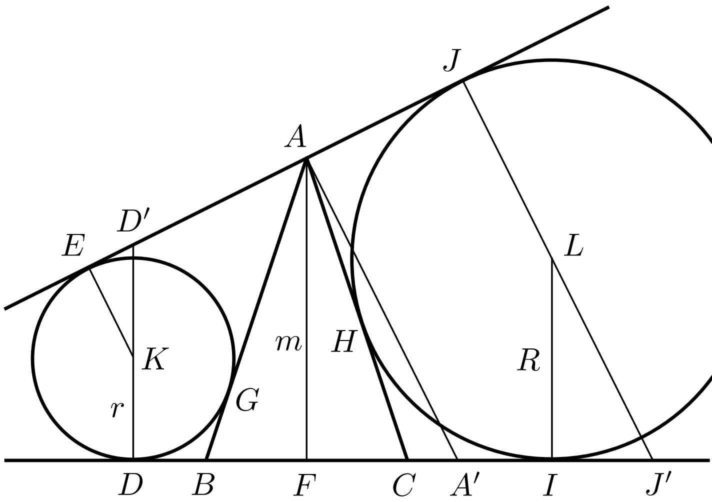
(iii) Ha n minden jegye 1, akkor $2^k - 1 = n = S^2 = k^2$, de itt a 4-gyel való osztási maradékok nem egyeznek. (1 pont)
Ha n-ben pontosan egy jegy 0, akkor $2^k - 1 - 2^{k-2} \leq n = S^2 = (k - 1)^2$, ha pedig n-ben legalább két jegy 0, akkor $2^{k-1} \leq n = S^2 \leq (k - 2)^2$, (1 pont)
azonban belátható (és belátandó), például teljes indukcióval, hogy az ellenkező irányú $3 \cdot 2^{k-2} - 1 > (k - 1)^2$, illetve $2^{k-1} > (k - 1)^2$ egyenlőtlenségek állnak fenn. (2 pont)

(iv) $2^{k-1} \leq n = S^2 \leq k^2$, (1 pont)
és indukcióval adódik, hogy ez $k \geq 7$-re nem teljesül. (1 pont)
Ekkor $n = S^2 \leq k^2 \leq 36$, azaz $n = S^2 = 36, 25, 16, 9, 4$ jöhet szóba, azonban ezek sem teljesítik az $n = S^2$ feltételt. (2 pont)

3. feladat

Adott a síkon két kör egymás külsejében, sugaraik r és R. Egy egyenlő szárú háromszög alapja az egyik külső közös érintőszakaszon fekszik, szemközti csúcsa a másik külső közös érintőszakaszra illeszkedik, szárai pedig érintenek egyet-egyet a körök közül. Igazoljuk, hogy a háromszögnek az alaphoz tartozó magassága $r + R$.

Első megoldás: Ha $r = R$, akkor a körök középpontjaihoz tartozó szakaszfelező merőleges egyúttal a szóban forgó egyenlő szárú háromszögnek is szimmetriatengelye, emiatt ilyenkor az állítás magától értetődik. A továbbiakban feltesszük, hogy $r < R$, ekkor a két külső közös érintőegyenes metszi egymást.



Használjuk az ábra szerinti jelöléseket: A, B, C a háromszög csúcsai, F az alap felezőpontja, a körök középpontjai K és L, az érintési pontok D, E, G, H, I és J. Az A-ból, B-ből, illetve C-ből húzott érintőszakaszok egyenlőségét, valamint az $AB = AC$ és $BF = FC$ egyenlőségeket felhasználva

$$AE - AJ = AG - AH = CH - BG = CI - BD = FI - FD$$

következik. Emiatt A és F ugyanakkora részszakaszokra osztja az egymással egyenlő EJ, illetve DI szakaszokat. Tehát $AJ = DF$ (és hasonlóan $AE = FI$). (3 pont)

A megoldást innen többféleképpen lehet folytatni, itt kétféle befejezést ismertetünk.

(i) Hosszabbítsuk meg az ábra szerint a DK szakaszt K-n túl, valamint a JL szakaszt L-en túl, hogy messék a másik közös érintőegyenest a D', illetve J' pontban. Állítsunk merőlegest az EJ egyenesre az A pontban, és jelölje A' ennek a merőlegesnek a metszéspontját a DI egyenessel. Az így keletkező $KD'E$, $LJ'I$ és $AA'F$ derékszögű háromszögek hasonlók, hiszen K-nál, L-nél, illetve A-nál levő szögük egyenlő a két kör külső közös érintőinek, azaz a DI egyenesnek és az EJ egyenesnek a hajlásszögével. A hasonlóság miatt

$$\frac{KD'}{KE} = \frac{AA'}{AF} = \frac{LJ'}{LI},$$

jelöljük λ-val ezeknek az arányoknak a közös értékét. Ezzel $DD' = (1+\lambda)r$, $JJ' = (1+\lambda)R$, valamint $AA' = \lambda m$, ahol m jelöli az AF magasságot. (2 pont)

Az $FAD'D$ és $JJ'A'A$ derékszögű trapézok magassága (DF, illetve AJ) egyenlő, és a trapézok szögei is egyenlők. Ezért a két trapézban az alapok különbsége egyenlő:

$$m - (1+\lambda)r \;=\; (1+\lambda)R - \lambda m$$

Ebből átrendezve és $(1+\lambda)$-val osztva a kívánt $m = r + R$ egyenlőség adódik. (2 pont)

(ii) Legyen a két külső közös érintő közti szög 2α, metszéspontjuk pedig O. Ekkor

$$r + R = (OD + OI)\operatorname{tg}\alpha\,. \qquad \text{(1 pont)}$$

A korábban megállapított $DF = AJ$ egyenlőség alapján

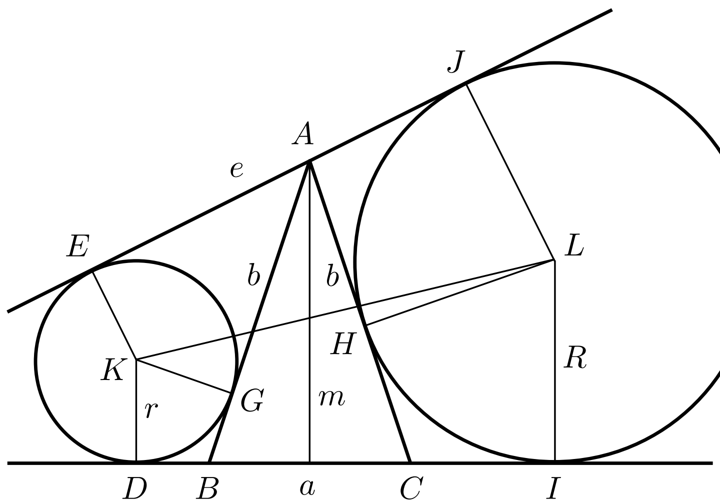
$$OD + OI = (OD + DF) + (OI - DF) = OF + (OJ - AJ) = OF + OA\,, \qquad \text{(1 pont)}$$

tehát

$$r + R = (OF + OA)\operatorname{tg}\alpha = (\cos 2\alpha + 1)OA\operatorname{tg}\alpha = 2\cos^2\alpha\, OA\operatorname{tg}\alpha = OA\,\sin 2\alpha = m\,.$$

(2 pont)

Második megoldás: Használjuk most is az első megoldásban bevezetett A, B, C, D, E, G, H, I, J, K, L, m jelöléseket, továbbá jelölje $a = BC$ az ABC háromszög alapját, $b = AB = AC$ a szárát, $e = DI = EJ$ pedig a külső közös érintőszakaszok hosszát.



Az A-ból, B-ből és C-ből húzott érintőszakaszok egyenlőségéből összeadással adódik, hogy az ABC háromszög kerülete $2e$-vel egyenlő. (3 pont)

Tekintsük a $DILJEK$ hatszöget, és írjuk fel a területét kétféleképpen. Egyrészt a KL szimmetriatengely a hatszöget két egybevágó derékszögű trapézra vágja, amelyek területe külön-külön $(r + R)e/2$-vel egyenlő. (1 pont)

Másrészt a hatszög feldarabolható az ABC háromszögre és négy darab deltoidra, ezek $DBGK$, $KGAE$, $CILH$ és $HLJA$. A deltoidok közül az első kettőnek a területösszege a BAK háromszög területének a kétszeresével (br-rel), a második kettőnek az összege pedig az ACL háromszög területének a kétszeresével (bR-rel) egyenlő. (1 pont)

A terület kétféle felírásából a

$$2 \cdot \frac{(r+R)e}{2} = \frac{am}{2} + br + bR$$

egyenlet adódik, ahonnan $2e = a + 2b$ figyelembe vételével átrendezéssel a kívánt $m = r + R$ formula következik. (2 pont)

4. feladat

Legyenek az n pozitív egésznél nem nagyobb prímek $p_1, \ldots, p_r$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sum_{i=1}^{r} \lfloor \log_{p_i} n \rfloor = \sum_{i=1}^{r} \left\lfloor \frac{n}{p_i} \right\rfloor - 2 \sum_{1 \le i < j \le r} \left\lfloor \frac{n}{p_i p_j} \right\rfloor + 3 \sum_{1 \le i < j < k \le r} \left\lfloor \frac{n}{p_i p_j p_k} \right\rfloor - \ldots,$$

ahol $\lfloor x \rfloor$ az x szám (alsó) egészrészét jelenti.

Megoldás: Az egyenlőséget az adja, hogy valamit kétféleképpen is megszámoltunk, egyszerűen (ez a bal oldal) és bonyolultan (ez a jobb oldal). (1 pont)

Észrevesszük, hogy a bal oldal az n-nél nem nagyobb (prímek és) prímhatványok száma. (2 pont)

A jobb oldalon az első összegben a $p_1, p_2, \ldots, p_r$ többszöröseit számoltuk össze, a több p_i-vel oszthatókat annyiszor vettük figyelembe, ahány különböző prímosztójuk volt. A második összeg hasonlóan a prímpárokkal oszthatók száma stb. Világos, hogy a (prímek és) prímhatványok csak az első összegben jutnak szerephez. (1 pont)

Be kell még látni, hogy a $t \ge 2$ különböző prímosztóval rendelkező, n-nél nem nagyobb számokat a jobb oldalon összességében 0-szor vesszük figyelembe. Valóban, ezek az egyes összegeknél t-szer, $\binom{t}{2}$-ször, $\ldots$, $\binom{t}{t}$-szer szerepelnek, azaz összesen

$$\sum_{j=1}^{t} (-1)^{j-1} j \binom{t}{j} = t \sum_{j=1}^{t} (-1)^{j-1} \binom{t-1}{j-1} = t(1-1)^{t-1} = 0\text{-szor}. \qquad (3 \text{ pont})$$

5. feladat

Egy 2016 csúcsú teljes gráf csúcsaiba versenybolhákat ültetünk, éleit pedig megszámozzuk az $1, 2, \ldots, \binom{2016}{2}$ természetes számokkal. A számokat ezután növekvő sorrendben felolvassuk. Minden egyes szám felolvasása után a számhoz tartozó él két végén ülő bolha helyet cserél. A verseny győztese a legtöbb helycserét végző bolha. (Holtverseny esetén több győztes is lehet.)

(a) Legfeljebb hány helycserét végezhet egy győztes bolha?

(b) Legalább hány helycserét kell végeznie egy győztes bolhának?

Megoldás: Amikor két bolha helyet cserél, úgy képzeljük, hogy mindkettő végigmegy – ellenkező irányban – a megfelelő csúcsokat összekötő élen. A verseny során minden egyes bolha egymás után csatlakozó élek egy sorozatát járja be, így a győztes bolha is. (1 pont)

Tetszőlegesen választva különböző, egymáshoz csatlakozó élek egy sorozatát, vagyis a gráf egy *vonal*át, ha ezek az élek kapják sorban az 1, 2, stb. sorszámokat, akkor a vonal kezdőpontján eredetileg ülő bolha pontosan ezeket az éleket fogja bejárni. Következésképpen a válasz az (a) kérdésre a 2016 csúcsú teljes gráfban található leghosszabb vonalnak a hossza. (1 pont)

A gráfban egy vonal kezdő- és végpontja kivételével minden más csúcs a vonalnak páros sok éléhez tartozik. A vonalon legfeljebb 2016 csúcs van. Ezek közül az első és az utolsó a vonalnak legfeljebb 2015 éléhez tartozhat, a többi legfeljebb 2014 csúcs mindegyike pedig legfeljebb 2014-hez. Így a vonalon található élek száma legfeljebb

$$\frac{2 \cdot 2015 + 2014 \cdot 2014}{2} = \binom{2016}{2} - \frac{2014}{2},$$

hiszen a számlálóban az éleket kétszer (a két végpont felől) számoltuk meg. (1 pont)

Ilyen hosszú vonal létezik is a 2016 csúcsú teljes gráfban. Ehhez felhasználjuk azt a jól ismert tényt, hogy egy összefüggő gráf éleit akkor és csak akkor lehet bejárni egy vonallal, ha a gráf minden csúcsának, kettő kivételével, páros a foka. Számozzuk meg a teljes gráf csúcsait 1-től 2016-ig, és hagyjuk el a 3 és 4, az 5 és 6, stb., a 2015 és 2016 sorszámú csúcsok közötti élt. A megmaradt gráfban az 1 és 2 számú csúcsok foka páratlan, az összes többi csúcs foka páros, így a gráfot egyetlen vonallal be lehet járni, amelynek a hosszát éppen a fenti kifejezés adja meg. (1 pont)

A feladat (b) részének megoldásához vegyük észre, hogy minden egyes él felsorolásakor két bolha mozgott. Összesen $\binom{2016}{2}$ él és 2016 bolha van, tehát valamelyik bolhának – és így a győztesnek is – legalább

$$\frac{2 \cdot \binom{2016}{2}}{2016} = 2015$$

helycserét kellett végeznie. (1 pont)

Megmutatjuk, hogy a csúcsokat fel lehet sorolni olyan sorrendben, hogy minden bolha pontosan 2015 helycserét végezzen, így a válasz a (b) kérdésre 2015.

A bolhák „fordulókban” végzik a helycserét. Minden bolha minden fordulóban pontosan egy helycserét végez, és 2015 forduló lesz, ami a kívánt végeredményt adja. A fordulók szervezéséhez helyezzük el a 2016 csúcsot a következőképpen. Közülük 2015-öt helyezzünk el egy szabályos 2015-szög csúcsaiban, az utolsót pedig tegyük a sokszög középpontjába. Az i-edik fordulóban az i-edik csúcsban ülő bolha helyet cserél a középpontban ülővel, a többi bolha pedig az erre az egyenesre merőleges átlók mentén végzi a helycserét. (2 pont)