A 2015/2016. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
döntő forduló

MATEMATIKA III. KATEGÓRIA
(a speciális tanterv szerint haladó gimnazisták)

Megoldások

1. feladat

Az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz egy részhalmazát kicsinek nevezzük, ha üres vagy kevesebb eleme van a legkisebb eleménél. Hány kicsi részhalmaz van?

Megoldás: A kicsi részhalmazok számát $K(n)$-nel jelölve, az első néhány n-re $K(1) = 1$, $K(2) = 2$, $K(3) = 3$, $K(4) = 5$. Ennek alapján azt sejtjük, hogy $K(n) = f_{n+1}$, az $(n+1)$-edik Fibonacci-szám ($f_1 = f_2 = 1$, és $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, ha $n > 2$).

Mivel $K(1) = f_2$ és $K(2) = f_3$, ezért elég belátni, hogy a $K(n)$ függvény is eleget tesz a Fibonacci-féle rekurziónak, azaz $n > 2$-re $K(n) = K(n-1) + K(n-2)$ $(*)$.

Soroljuk két osztályba $\{1, 2, \dots, n\}$ kicsi részhalmazait aszerint, hogy az n számot nem tartalmazzák (A), illetve tartalmazzák (B). Az A-beliek száma nyilván $K(n-1)$. Így elég megmutatnunk, hogy a B-beliek száma megegyezik $\{1, 2, \dots, n-2\}$ kicsi részhalmazainak a számával. Ehhez kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesítünk közöttük, éspedig a következőképpen. Ha a B-beli H halmaz elemei $a_1 < a_2 < \dots < a_{k-1} < a_k = n$, ahol a feltétel szerint $1 \le k < a_1$, akkor a H-nak megfelelő H' halmaz álljon az $a_1 - 1 <$ $< a_2 - 1 < \dots < a_{k-1} - 1$ elemekből ($k = 1$ esetén H' üres). Mivel $a_{k-1} - 1 \le n - 2$ és $k < a_1 \iff k - 1 < a_1 - 1$, ezért H' valóban $\{1, 2, \dots, n-2\}$ egy kicsi részhalmaza. Az is világos, hogy minden ilyen halmaz előáll egy B-beli halmaz képeként, és a megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű.

Egy másik bizonyítási lehetőség a következő. Az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmazban egy j elemű részhalmaz pontosan akkor kicsi, ha nem tartalmazza az $1, 2, \dots, j$ elemek egyikét sem, tehát mind a j eleme a $j+1, j+2, \dots, n$ számok közül kerül ki. Ennek alapján a j elemű kicsi részhalmazok száma $\binom{n-j}{j}$. Innen

$$K(n) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-j}{j}.$$

Ennek a képletnek az alapján, az $\binom{s}{m} = \binom{s-1}{m} + \binom{s-1}{m-1}$ összefüggés felhasználásával könnyen igazolható a $(*)$ rekurzió.

2. feladat

Anna tetszőlegesen beosztja az $n+1, n+2, \ldots, n+2k$ számokat k darab diszjunkt párba. Ezután megmondja Balázsnak, mennyi az egyes párokban az elemek szorzata. Legyen $f(n)$ az a maximális k, amelyre ebből a k darab szorzatértékből Balázs mindig ki tudja találni az Anna által gondolt számpárokat. Bizonyítsuk be, hogy vannak olyan c és d, az n-től független pozitív konstansok, hogy minden elég nagy n-re $c\sqrt{n} < f(n) < d\sqrt{n}$.

Megoldás: Először a felső becslést igazoljuk. Az $a_1, a_2, \ldots, a_6$ számokat úgy fogjuk megadni, hogy

$$a_1a_2 = a_3a_6, \qquad a_3a_4 = a_5a_2 \qquad \text{és} \qquad a_5a_6 = a_1a_4 \tag{1}$$

teljesüljön. Ekkor, ha Anna ezt a hat számot akár $(a_1, a_2), (a_3, a_4), (a_5, a_6)$, akár (a_3, a_6), $(a_2, a_5), (a_1, a_4)$ párokba osztja, ugyanazok a szorzatok jönnek létre, tehát Balázs nem tudja kitalálni a párosítást.

Legyen t egy később n-től függően alkalmasan megválasztandó pozitív egész, és legyen

$$\begin{aligned}
&a_1 = (t-2)(t+2) = t^2-4, && a_2 = (t-1)t = t^2-t, && a_3 = (t-2)t = t^2-2t,\\
&a_4 = (t-1)(t+1) = t^2-1, && a_5 = (t-2)(t+1) = t^2-t-2, && a_6 = (t-1)(t+2) = t^2+t-2.
\end{aligned}$$

Ekkor (1) fennáll. Az a_i számoknak $n+1$ és $n+2k$ közé kell esniük. Mivel $t > 2$-re a_3 a legkisebb és a_6 a legnagyobb a hat szám közül, ezért ez azt jelenti, hogy

$$n+1 \le a_3 = t^2 - 2t - 1 \qquad \text{és} \qquad a_6 = t^2 + t - 2 \le n + 2k$$

kell, hogy teljesüljön. Az első egyenlőtlenségből $t \ge 1+\sqrt{n+3}$, tehát a legkisebb lehetséges választás $t = 1 + \lceil\sqrt{n+3}\rceil$ (ahol $\lceil x\rceil$ az x szám felső egészrészét jelöli, azaz a legkisebb, x-nél nem kisebb egész számot). Ezt a második egyenlőtlenségbe beírva

$$2k \ge (t-1)(t+2) - n = \lceil\sqrt{n+3}\rceil(\lceil\sqrt{n+3}\rceil + 3) - n.$$

Ez biztosan teljesül, ha

$$2k \ge (\sqrt{n+3}+1)(\sqrt{n+3}+4) - n = n + 3 + 5\sqrt{n+3} + 4 - n = 5\sqrt{n+3} + 7,$$

azaz elég nagy n-re $k > 3\sqrt{n}$ esetén a fenti konstrukció megvalósítható.

Az alsó becsléshez megmutatjuk, hogy $f(n) > \lfloor\sqrt{n}/2\rfloor$, mert

$$(n+b_1)(n+b_2) = (n+b_3)(n+b_4), \quad 1 \le b_1 < b_2 \le \sqrt{n} \text{ és } 1 \le b_3 < b_4 \le \sqrt{n}$$

teljesüléséből $b_1 = b_3$ és $b_2 = b_4$ következik (azaz ekkor bármelyik pár szorzata különböző eredményt ad). A beszorzás elvégzése és összevonások után $(b_1+b_2-b_3-b_4)n = b_3b_4-b_1b_2$ adódik. A jobb oldali, n-nel osztható egész szám abszolút értéke kisebb n-nél, tehát csak 0 lehet, azaz $0 = b_3b_4 - b_1b_2 = b_1 + b_2 - b_3 - b_4$. Ez azt jelenti, hogy $g(x) = (x+b_1)(x+b_2)-$ $-(x+b_3)(x+b_4)$ a nulla polinom (minden együtthatója nulla), vagyis $(x+b_1)(x+b_2)$ és $(x+b_3)(x+b_4)$ mint polinomok azonosak, és így a gyöktényezős alak egyértelműségéből a kívánt $b_1 = b_3$, $b_2 = b_4$ következik. (Ugyanezt úgy is megkaphatjuk, hogy a $b_1+b_2 = b_3+b_4$ $(**)$ egyenlőség négyzetéből levonjuk a $b_1b_2 = b_3b_4$ egyenlőség 4-szeresét, négyzetgyököt vonunk, és az így adódó $b_2-b_1 = b_4-b_3$ összefüggést hozzáadjuk $(**)$-hoz, illetve levonjuk abból.)

3. feladat

Az ABC háromszög A-val átellenes oldalán felvettük az A_1 pontot, a B-vel átellenes oldalon B_1-et, a C-vel átellenesen C_1-et úgy, hogy az AA_1, BB_1, CC_1 szakaszok áthaladnak ugyanazon a P ponton. Bizonyítsuk be, hogy

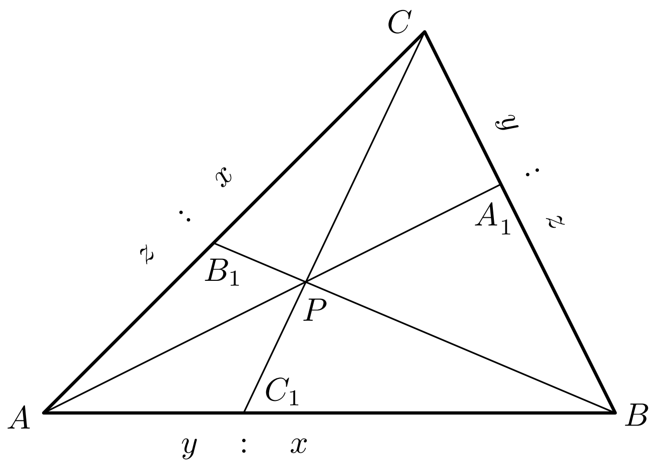
$$AP \cdot PA_1 + BP \cdot PB_1 + CP \cdot PC_1 \; < \; \frac{1}{3}\left(BC^2 + CA^2 + AB^2\right).$$

Megoldás: A tömörség kedvéért használjuk az $S = AP \cdot PA_1 + BP \cdot PB_1 + CP \cdot PC_1$, $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ jelöléseket, ezekkel a bizonyítandó állítás $S < (a^2 + b^2 + c^2)/3$.

Legyen

$$x = \frac{PA_1}{AA_1}, \quad y = \frac{PB_1}{BB_1} \quad \text{és} \quad z = \frac{PC_1}{CC_1}.$$

Célunk, hogy S-et kifejezzük a, b, c és x, y, z segítségével. Nyilván $AP \cdot PA_1 = x(1-x)AA_1^2$, $BP \cdot PB_1 = y(1-y)BB_1^2$ és $CP \cdot PC_1 = z(1-z)CC_1^2$.



Az x, y, z arányszámok rendre egyenlők a BCP, CAP, illetve ABP részháromszögek területének az ABC háromszög területéhez viszonyított arányával, ezért egyrészt érvényes az $x+y+z=1$ egyenlőség, másrészt x, y és z egymás közti arányai megegyeznek ezeknek a részháromszögeknek a területarányaival. Két ilyen részháromszögnek van közös oldala (például ABP és CAP esetében AP), területarányuk tehát az ehhez az oldalhoz tartozó magasságaik aránya, ami pedig az ABC háromszög szemközti oldalának két szelete közti aránnyal (a példában A_1B és CA_1 arányával) egyenlő. Ezért

$$y : z = CA_1 : A_1B, \quad z : x = AB_1 : B_1C \quad \text{és} \quad x : y = BC_1 : C_1A.$$

Ezt felhasználva az $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ vektorok az alábbi módon írhatók fel az ABC háromszög oldalvektorai segítségével:

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{y\,\overrightarrow{AB} + z\,\overrightarrow{AC}}{y+z}, \quad \overrightarrow{BB_1} = \frac{z\,\overrightarrow{BC} + x\,\overrightarrow{BA}}{z+x}, \quad \overrightarrow{CC_1} = \frac{x\,\overrightarrow{CA} + y\,\overrightarrow{CB}}{x+y}.$$

Ezekből skaláris szorzást alkalmazva képleteket kaphatunk AA_1^2-re, BB_1^2-re és CC_1^2-re; például AA_1 esetében

$$AA_1^2 = \frac{1}{(y+z)^2}\big(y^2c^2 + z^2b^2 + 2yz\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\big).$$

Itt $a^2 = \big(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\big)^2 = b^2 + c^2 - 2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ miatt $2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = b^2 + c^2 - a^2$, ezzel tehát

$$\begin{aligned} AA_1^2 &= \frac{1}{(y+z)^2}\left(y^2c^2 + z^2b^2 + yz(b^2+c^2-a^2)\right) = \\ &= \frac{-yz}{(1-x)^2}\,a^2 + \frac{z}{1-x}\,b^2 + \frac{y}{1-x}\,c^2, \end{aligned}$$

ahonnan

$$AP\cdot PA_1 = x(1-x)\,AA_1^2 = -\frac{xyz}{1-x}\,a^2 + zx\,b^2 + xy\,c^2.$$

Hasonló formulákat kapunk a másik két szorzatra is, ezeket végül összeadva a bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldalára az

$$\begin{aligned} S &= \left(2yz - \frac{xyz}{1-x}\right)a^2 + \left(2zx - \frac{xyz}{1-y}\right)b^2 + \left(2xy - \frac{xyz}{1-z}\right)c^2 = \\ &= yz\left(3 - \frac{1}{1-x}\right)a^2 + zx\left(3 - \frac{1}{1-y}\right)b^2 + xy\left(3 - \frac{1}{1-z}\right)c^2 \end{aligned}$$

képlet adódik.

Rátérünk az $S < (a^2+b^2+c^2)/3$ egyenlőtlenség igazolására. Ehhez csak annyit használunk fel, hogy a fenti formulában a, b, c valamely háromszög oldalai (tehát olyan pozitív számok, amelyekre a három háromszögegyenlőtlenség érvényes), továbbá x, y, z nemnegatív számok, melyekre $x+y+z=1$.

Az egyenlőtlenség nyilvánvaló módon érvényes, ha a fenti képletben mind a^2, mind b^2, mind c^2 együtthatója $1/3$-nál kisebb. Először megmutatjuk, hogy ez így van, ha x, y és z mindegyike legalább $1/6$. (Általában nem várható, hogy az együtthatók mind $1/3$-nál kisebbek legyenek, például ha $x=0$ és $y=z=1/2$ (vagyis amikor P a BC oldal felezőpontja), a^2 együtthatója $1/2$.)

Tegyük fel tehát, hogy $x, y, z \geq 1/6$, és tekintsük például a^2 együtthatóját (a másik kettő esetében hasonlóképpen lehet eljárni). Az yz szorzatot

$$yz = \left(\frac{y+z}{2}\right)^2 - \left(\frac{y-z}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{y+z}{2}\right)^2 = \left(\frac{1-x}{2}\right)^2$$

alapján lehet felülről becsülni, és ezzel valóban

$$yz\left(3 - \frac{1}{1-x}\right) \leq \left(\frac{1-x}{2}\right)^2\left(3 - \frac{1}{1-x}\right) \leq \left(\frac{5}{12}\right)^2\cdot\frac{9}{5} = \frac{5}{16} < \frac{1}{3}.$$

Ugyancsak könnyű ellenőrizni, hogy mindhárom együttható $1/3$-nál kisebb, ha x, y és z közül kettő is kisebb $1/6$-nál. Az együtthatókat adó háromtényezős szorzatok tényezői között ugyanis ekkor mindhárom esetben szerepel olyan, amelynek az értéke 1/6-nál kisebb, a másik két tényező pedig legfeljebb 1, illetve 2.

Tekintsük végül a fennmaradó esetet, vagyis amikor x, y és z közül pontosan az egyik kisebb 1/6-nál. Feltehetjük, hogy $x < 1/6$, ekkor $1/6 \le y, z \le 5/6$.

Ilyenkor a^2 együtthatója nagyobb lehet 1/3-nál, ezért ebben az esetben annak az 1/3-ot meghaladó részét átcsoportosítjuk a másik két taghoz. Eközben felhasználjuk a háromszögegyenlőtlenségből nyerhető $a^2 < (b+c)^2 = 2b^2 + 2c^2 - (b-c)^2 \le 2b^2 + 2c^2$ becslést:

$$\begin{aligned} S \ < \ & \frac{1}{3}a^2 + \left(zx\left(3 - \frac{1}{1-y}\right) + 2\left(yz\left(3 - \frac{1}{1-x}\right) - \frac{1}{3}\right)\right)b^2 + \\ & + \left(xy\left(3 - \frac{1}{1-z}\right) + 2\left(yz\left(3 - \frac{1}{1-x}\right) - \frac{1}{3}\right)\right)c^2. \end{aligned}$$

Azt akarjuk belátni, hogy itt b^2 és c^2 együtthatója is legfeljebb 1/3. Elég b^2 együtthatóját megvizsgálni, hiszen a másik ebből átbetűzéssel származik. Állításunk tehát az, hogy

$$zx\left(3 - \frac{1}{1-y}\right) + 2yz\left(3 - \frac{1}{1-x}\right) \ \le \ 1.$$

Ennek igazolásához fölhasználjuk, hogy 1-nél kisebb x-re és y-ra érvényesek az

$$\frac{1}{1-x} \ \ge \ 1 + x, \quad \text{illetve} \quad \frac{1}{1-y} \ \ge \ 4y$$

egyenlőtlenségek, és ezért elegendő azt megmutatni, hogy

$$zx(3-4y) + 2yz(2-x) \ \le \ 1,$$

illetve ezzel egyenértékű módon azt, hogy

$$3zx + 4yz - 6xyz \ \le \ 1.$$

A bal oldalon $y \ge 1/6$ miatt $6xyz \ge zx$, ezért elég belátni, hogy $2zx + 4yz \le 1$. Itt $y + z = 1 - x$ miatt $yz \le (1-x)^2/4$, tehát elegendő a $2zx + (1-x)^2 \le 1$ egyenlőtlenséget bebizonyítani. Átrendezéssel ez egyenértékű $x(x+2z-2) \le 0$-val, ami pedig nyilvánvalóan igaz, hiszen $0 \le x < 1/6$ és $z \le 5/6$.