



# Oktatási Hivatal

A 2016/2017. tanévi  
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny  
első forduló

MATEMATIKA

II. KATEGÓRIA  
(GIMNÁZIUM)

## Javítási-értékelési útmutató

1. Tekintsük a koordinátarendszer azon  $(x; y)$  pontjait, amelyekre

$$|x - 1| + |y + 2| \leq 3.$$

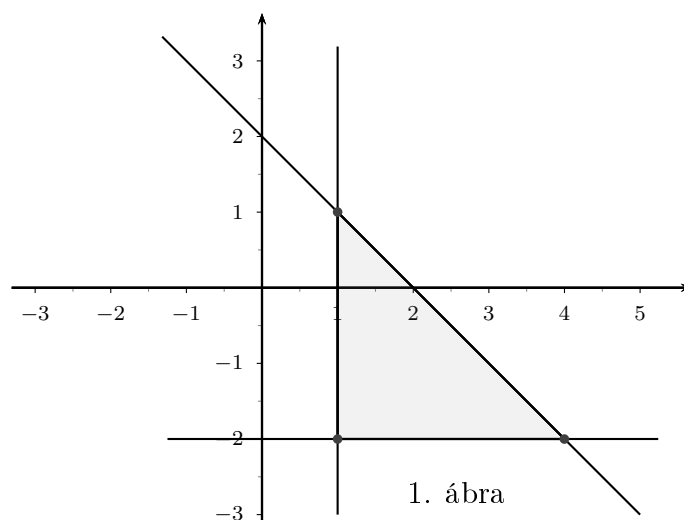
Mekkora ennek a ponthalmaznak a területe?

**Megoldás:** A feladat feltételében szereplő  $x - 1$  és  $y + 2$  előjele alapján tekintsük az alábbi négy esetet:

Ha mindkettő pozitív, akkor  $x \geq 1$  és  $y \geq -2$ , a feltétel pedig  $x - 1 + y + 2 \leq 3$ .

1 pont

Ebben az esetben tehát a megfelelő  $(x; y)$  pontok a koordinátarendszer  $y$  tengelyével párhuzamos  $x = 1$  egyenletű egyenesétől jobbra, az  $x$  tengellyel párhuzamos  $y = -2$  egyenletű egyenesétől fölfele és az  $y = 2 - x$  egyenes alatti háromszög alakú tartomány, annak határaival együtt (1. ábra). A kapott háromszög derékszögű és egyenlő szárú, csúcsai az  $(1; -2)$ ,  $(1; 1)$  és  $(4; -2)$  pontok. Befogóinak hossza 3, így területe 4,5. 2 pont



1. ábra

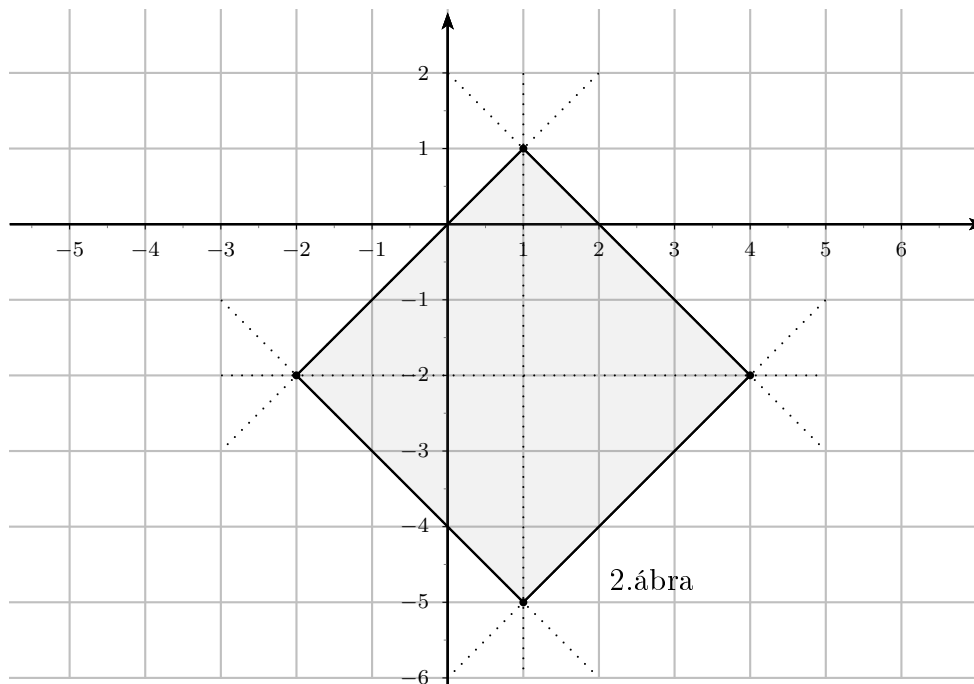
A további három eset az elsőhöz hasonló módon adódik:

Ha  $x \leq 1$  és  $y \geq -2$ , akkor  $1 - x + y + 2 \leq 3$ .

Ha  $x \geq 1$  és  $y \leq -2$ , akkor  $x - 1 - y - 2 \leq 3$ .

Ha  $x \leq 1$  és  $y \leq -2$ , akkor  $1 - x - y - 2 \leq 3$ .

Ezek mindegyike egy-egy egyenlő szárú derékszögű háromszög alakú tartomány. 3 pont  
 A négy tartomány együtt az alábbi (2.ábra) 18 területű négyzetet határozza meg. 1 pont



Összesen 7 pont

2. Kiválasztjuk véletlenszerűen a  $8 \times 8$ -as sakktábla két különböző mezőjét és megjelöljük a középpontjukat. Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy a kijelölt középpontokat összekötő szakasz felezőpontja is egy mező középpontja legyen.

**Megoldás:** A  $8 \times 8$ -as sakktábla minden mezőjéhez hozzárendelünk egy  $(a; b)$  számpárt, amennyiben az adott mező az  $a$ . sor  $b$ . oszlopában van. Kiválasztva két mezőt, a hozzájuk tartozó számpárok  $(a_1; b_1)$  és  $(a_2; b_2)$  esetén a középpontokat összekötő szakasz felezőpontja éppen akkor lesz egy mező középpontja, ha  $\frac{a_1+a_2}{2}$  és  $\frac{b_1+b_2}{2}$  is egész, azaz  $a_1$  és  $a_2$ , valamint  $b_1$  és  $b_2$  paritása megegyezik. 3 pont

A sakktábla 64 mezője 4 darab egyenlő létszámú, 16-os csoportba osztható a hozzájuk rendelt számpárok paritásának megfelelően. 2 pont

Vegyük az első kiválasztott mezőt, az általa meghatározott csoportban további 15 mező van. A második mezőt a maradék 63 közül választhatjuk, ezek közül 15 felel meg a feladat feltételeinek, így a keresett valószínűség  $\frac{15}{63}$ . 2 pont

Összesen 7 pont

Az utóbbi négy pont bontását megadjuk egy további gondolatmenet esetén is: A sakk-tábla 64 mezőjéből kettőt  $\binom{64}{2}$ -féleképpen választhatunk ki, ennyi az összes eset.

1 pont

A jó esetekben a két mezőt ugyanabból a 16-ból választhatjuk, amelyet a hozzájuk rendelt számpár paritása meghatároz. Mivel négy ilyen csoport van, a jó esetek száma  $4 \cdot \binom{16}{2}$ .

2 pont

A keresett valószínűség tehát

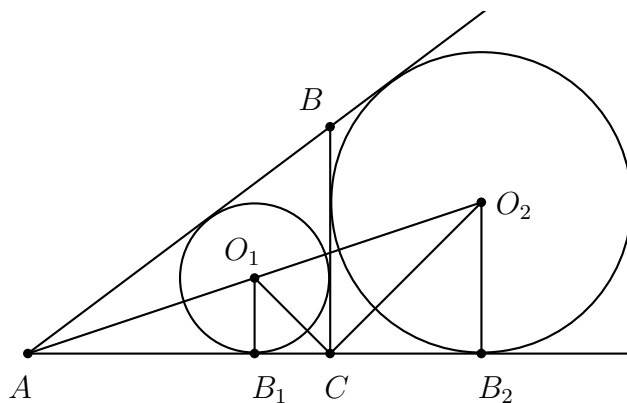
$$\frac{4 \cdot \binom{16}{2}}{\binom{64}{2}} = \frac{15}{63}.$$

1 pont

3. Az  $ABC$  derékszögű háromszög beírt körének sugara legyen  $r$ . Mekkora lehet a befogók aránya, ha az egyik befogóhoz hozzáírt kör sugara  $2r$ ?

**Megoldás:** Használjuk az ábra jelöléseit, azaz legyen  $C$  a háromszög derékszögű csúcsa és tekintsük a  $BC$  oldal hozzáírt körét. A beírt és a hozzáírt kör középpontja rendre  $O_1$  és  $O_2$ . Legyenek továbbá a beírt és a hozzáírt kör érintési pontjai az  $AC$  egyenesen  $B_1$  és  $B_2$ .

1 pont



Mivel  $O_1B_1C$  és  $O_2B_2C$  egyenlő szárú, derékszögű háromszögek, ezért  $B_1C = r$  és  $B_2C = 2r$ .

1 pont

A szokásos jelölésekkel  $B_1C = s - c$  és  $B_2C = s - b$ .

1 pont

Így  $B_1B_2 = 3r = (s - c) + (s - b) = a$ . A  $BC$  befogó hossza tehát  $3r$ .

1 pont

Az  $AO_1B_1$  háromszög hasonló az  $AO_2B_2$  háromszöghöz, hiszen oldalaik párhuzamosak. A hasonlóság aránya a megfelelő  $O_1B_1$  és  $O_2B_2$  oldalak aránya, innen

$$\frac{AB_1}{AB_2} = \frac{O_1B_1}{O_2B_2} = \frac{1}{2}.$$

Ebből

$$2 \cdot AB_1 = AB_2 = AB_1 + B_1B_2 = AB_1 + 3r.$$

Innen azt kapjuk, hogy  $AB_1 = 3r$ , és így  $AC = 4r$ .

2 pont

A befogók aránya tehát  $\frac{3}{4}$ , vagy ennek reciproka, azaz  $\frac{4}{3}$ .

1 pont

Összesen 7 pont

4. Oldjuk meg a következő egyenletet az egész számok halmazán:

$$x \cdot (x + 2) = y^2 \cdot (y^2 + 1).$$

**Megoldás:** Az egyenlet bal és jobb oldalán is olyan kifejezés áll, amely könnyen kiegészíthető teljes négyzetté. 1 pont

Így a következőt kapjuk:

$$(y^2)^2 < x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 = y^4 + y^2 + 1 \leq (y^2 + 1)^2. \quad 2 \text{ pont}$$

Amennyiben az utolsó egyenlőtlenség jelnél nem egyenlőség lenne, az azt jelentené, hogy két szomszédos négyzetszám között lenne még egy további:

$$(y^2)^2 < (x + 1)^2 < (y^2 + 1)^2.$$

Mivel ez lehetetlen, így  $y^4 + y^2 + 1 = (y^2 + 1)^2$  és ebből  $y = 0$ . 2 pont

A kitűzött egyenlet ekkor  $x \cdot (x + 2) = 0$ , ennek megoldásai pedig az  $x_1 = 0$  és az  $x_2 = -2$ . 1 pont

A feladat feltételeinek eleget tevő  $(x; y)$  számpárok tehát a  $(0; 0)$  és a  $(-2; 0)$ . 1 pont

Összesen 7 pont

5. Egy 25 tagú társaság vacsorázni ment. Az öt hölgy, Anna, Borbála, Cecília, Dóra és Erzsébet továbbá a húsz férfi az étteremben egy kör alakú asztalhoz ültek, ahol a helyeket megszámozták körben az 1, 2, ..., 25 számokkal. Hányféleképpen ülhetnek le, hogy a hölgyek közt ne legyen kettő sem szomszédos, sem másodsomszédos? (Azaz bármely két hölgy között legalább két férfi ül.)

**Megoldás:** A hölgyek széke mellett balra és jobbra is olyan székek kell lennie, amelyen férfi ül. Ezért gondolatban a hölgyek székéhez ragasszuk hozzá a bal és jobb oldali széket, így létrejön egy három székből álló csoport, nevezzük ezt *királynői* székeknek. Az asztal körül így lesz 5 királynői szék. Ezek együtt az öt hölgy helye mellett 10 férfi helyét is meghatározzák, tehát marad 10 további szék. 2 pont

Készítsük el az ültetési rendet úgy, hogy először Anna választ magának helyet, ez lehet 25-féle. Most Anna királynői széke után pozitív körülmények szerint még további 10 szék és 4 királynői szék következik, ezek lehetséges sorrendjeinek száma  $\binom{14}{4}$ . 2 pont

A királynői székekre a további négy hölgy  $4! = 24$ -féleképpen ülhet le, a 20 férfi pedig a maradék székekre  $20!$ -féleképpen. 2 pont

A megfelelő ülésrendek száma ezek szerint  $25 \cdot \binom{14}{4} \cdot 4! \cdot 20!$ . 1 pont

Összesen 7 pont