Oktatási Hivatal

A 2016/2017. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
második forduló

MATEMATIKA

II. KATEGÓRIA
(GIMNÁZIUM)

Javítási–értékelési útmutató

1. Van három dobókockánk, feldobjuk mind a hármat. Azokat, amikkel hatost dobtunk, félretesszük. Ha mindhárom hatos, abbahagyjuk a játékot. Különben a megmaradt kockákkal újra dobunk. Ezt addig ismételjük, amíg minden kockán hatos nem lesz. Mennyi a valószínűsége, hogy legfeljebb három dobás után véget ér a játék?

Megoldás: Tekintsünk egyetlen dobókockát és azt dobjuk fel háromszor. Annak a valószínűsége, hogy a három dobás egyike sem hatos $p = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$. Tehát annak a valószínűsége, hogy a három dobásból legalább egy hatos lesz $q = 1 - p = \frac{91}{216}$. 3 pont

Most gondolatban játsszuk úgy a játékot, hogy a félretett kockákat is tovább dobáljuk. A játék véget ér legfeljebb három dobás után, ha mindhárom kocka esetén az első három dobás valamelyike hatos. 2 pont

Ennek a valószínűsége $q^3 = \left(\frac{91}{216}\right)^3 \approx 0.0748$. 2 pont

Összesen 7 pont

2. Igazoljuk, hogy ha x, y, és z eleme a $[-5, 3]$ intervallumnak, akkor

$$\sqrt{3x - 5y - xy + 15} + \sqrt{3y - 5z - yz + 15} + \sqrt{3z - 5x - xz + 15} \leq 12.$$

Mikor áll fenn egyenlőség?

Megoldás: A gyökjel alatti kifejezések szorzattá alakíthatók:

$$\sqrt{(x+5)(3-y)} + \sqrt{(y+5)(3-z)} + \sqrt{(z+5)(3-x)} \leq 12. \qquad \text{2 pont}$$

Mivel az x valós szám az $[-5; 3]$ intervallumból való, ezért $x + 5 \geq 0$ és $3 - x \geq 0$. Hasonlóképpen igaz ez az y és z számokra is. A gyökjelek alatt minden zárójelben nemnegatív szám áll, így a bal oldal értelmezett. 1 pont

A gyökjelek alatt szereplő zárójeles kifejezések előjelére vonatkozó iménti észrevétel alapján felírható a számtani–mértani közepek közötti egyenlőtlenség:

$$\sqrt{(x+5)(3-y)} \leq \frac{x+5+3-y}{2}$$

$$\sqrt{(y+5)(3-z)} \leq \frac{y+5+3-z}{2}$$

$$\sqrt{(z+5)(3-x)} \leq \frac{z+5+3-x}{2}$$

Ezek megfelelő oldalait összeadva éppen a bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk. 2 pont

Egyenlőség akkor van, ha

$$x+5=3-y, \quad y+5=3-z, \quad z+5=3-x,$$

amiből $x=y=z=-1$ adódik.

2 pont

Összesen 7 pont

3. Határozzuk meg, mely a, b, c nemnegatív egész számok esetén teljesül:

$$3^a + 17 \cdot 4^b = c^2.$$

Megoldás: Megmutatjuk, hogy az egyetlen megoldás az $a=0, b=3, c=33$.

Amennyiben a értéke nem 0, akkor a bal oldalon 3^a hárommal osztható. Mivel minden nemnegatív b esetén a $17 \cdot 4^b$ szorzat 3-as maradéka 2, ezért a bal oldal hármas maradéka 2. A jobb oldalon c^2 áll, négyzetszám hármas maradéka nem lehet 2, így nem kaphatunk megoldást. 2 pont

Azt kaptuk, hogy a csak 0 lehet. Vonjunk ki mindkét oldalból $3^0 = 1$–et:

$$17 \cdot 4^b = c^2 - 1 = (c+1)(c-1).$$

A b értéke nem lehet 0, mivel a 17 prím és nem áll elő két olyan egész szám szorzataként, amelyek különbsége 2. 2 pont

A továbbiakban $b > 0$, azaz a bal oldal páros, ebből következik, hogy $c+1$ és $c-1$ is páros. A bal oldal prímtényezős felbontása $17 \cdot 2^{2b}$. A jobb oldalon két szomszédos páros szám áll, ezek egyike 2-vel osztható, de 4-gyel nem. 1 pont

Így a bal oldalt tekintve a 17-et meg kell szoroznunk a 2 vagy a 2^{2b-1}-nel ahhoz, hogy megkapjuk a jobb oldali tényezők egyikét. Mivel a jobb oldalon álló két tényező különbsége 2, ezért két lehetséges csoportosítás maradt:

$$17 \cdot 2 = c+1, \quad 2^{2b-1} = c-1; \quad \text{vagy} \quad 17 \cdot 2 = c-1, \quad 2^{2b-1} = c+1.$$

Az elsőből kapjuk, hogy $c = 33$ és $b = 3$, a másodikból nem kapunk megfelelő megoldást. 2 pont

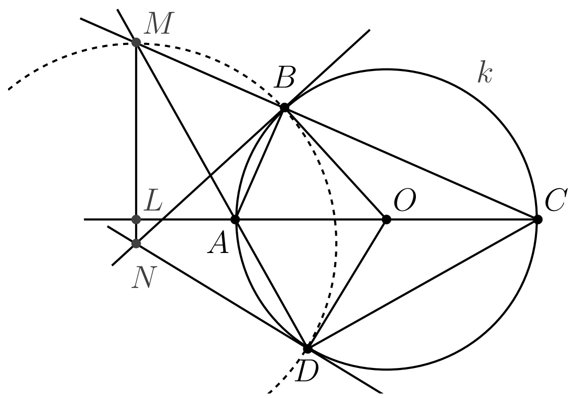
Összesen 7 pont

4. Tekintsük az $ABCD$ húrnégyszöget. Az AC szakasz a húrnégyszög köré írható k körének az átmérője. Az AD és BC egyenesek metszéspontja legyen M. A k kört a B és D pontban érintő érintők az N pontban metszik egymást. Bizonyítsuk be, hogy AC merőleges MN-re.

Megoldás: Jelölje a k középpontját, azaz az AC szakasz felezőpontját O. Legyen $BCD\angle = \gamma$, ez a BD ívhez tartozó kerületi szög, ezért a középponti szög $BOD\angle = 2\gamma$. Az $NBOD$ négyszögben most már három szöget ismerünk, hiszen B-nél és D-nél derékszög van, így $BND\angle = 180° - 2\gamma$. 1 pont

Tekintsük az MDC háromszöget, ebben D-nél derékszög van, hiszen rajta van AC Thalesz körén, C-nél γ, tehát $DMC\angle = 90° - \gamma$. 1 pont

Mivel $NB = ND$, ezért az N középpontú NB sugarú kör BD húrjához tartozó középponti szög $BND\angle = 180° - 2\gamma$, a kerületi szög ennek fele. Mivel $BMC\angle = 90° - \gamma$, ezért M is rajta van ezen a körön. 2 pont



A k körben az AD ívhez tartozó kerületi szög legyen $ACD\angle = \alpha$, az AD ívhez tartozó érintő szárú kerületi szög is ugyanekkora, $ADN\angle = \alpha$. Mivel $ND = NM$, ezért $NMD\angle = NDM\angle = \alpha$. 2 pont

Jelölje MN és AC metszéspontját L. Az LMA háromszögben M-nél levő szög α. A csúcsszögek egyenlők, $MAL\angle = DAC\angle$. Az ADC háromszögben D-nél derékszög van, hiszen rajta van AC Thalesz körén, így $DAC\angle = 90° - \alpha$. Azt kaptuk, hogy az LMA háromszögben M-nél α, D-nél $90° - \alpha$ szög van. Ebből következik, hogy L-nél levő szöge derékszög és ezzel az állítást igazoltuk. 1 pont

Összesen 7 pont

Megjegyzés: A feladat állítása a pólus-poláris ismeretében azonnal adódik. Az AC és BD átlók P metszéspontjának polárisa merőleges a P-n áthaladó átmérőre, másrészt ezen a polárison rajta van M és N is.