Oktatási Hivatal

A 2016/2017. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
első forduló

MATEMATIKA III. KATEGÓRIA
(a speciális tanterv szerint haladó gimnazisták)

FELADATOK

1. Legyen az ABC háromszögben az A, illetve B csúcsból húzott magasság talppontja A_1, illetve B_1, továbbá $a = BC$, $b = AC$, $m_a = AA_1$, $m_b = BB_1$. Bizonyítsuk be, hogy
$$CA_1 \cdot CB_1 = ab - m_a m_b \,.$$

2. Ha k pozitív egész szám, jelölje p_k a k-adik prímszámot (tehát $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $\ldots$). Vannak-e olyan k és n pozitív egész számok, amelyekre $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k = 2016^n + 10n - 26$?

3. Oldjuk meg a
$$\frac{16}{3}x^4 + \frac{1}{6x^2} = \sin(\pi x)$$
egyenletet a valós számok halmazán.

4. Bizonyítsuk be, hogy bármely adott (nem feltétlenül konvex) négyszöghöz található olyan pont, hogy a négyszögnek erre a pontra vonatkozó középpontos tükörképe az eredeti négyszög területének legalább a harmadrészét lefedi.

5. Tegyük fel, hogy az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ független események valószínűsége legfeljebb $1/2$. Mutassuk meg, hogy annak a valószínűsége, hogy közülük pontosan egy következik be, szintén legfeljebb $1/2$.

Valamennyi feladat 7 pontot ér.