



# Oktatási Hivatal

---

A 2017/2018. tanévi  
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny  
harmadik, döntő forduló

## MATEMATIKA II. KATEGÓRIA (GIMNÁZIUM)

### FELADATOK

1. Egy 10 tagú csoport minden tagját megkérték, írjanak le három különböző pozitív egész számot. Később kiderült, hogy bármely két ember számai között volt legalább egy azonos. Az 1-es számot éppen  $n$  ember választotta és semelyik más számot nem választották ennél többen. Mi lehetett  $n$  értéke?

2. Az  $ABC$  hegyesszögű háromszögben  $AC \neq BC$ . A háromszög köré írt kör középpontját jelölje  $O$ , magasságpontját pedig  $M$ . Az  $A$ ,  $B$  és  $C$  csúcsokhoz tartozó magasságok talppontjai legyenek rendre  $A_1$ ,  $B_1$  és  $C_1$ . Jelölje  $D$  a  $C$  csúcsnak az  $A_1B_1$  egyenesre vonatkozó tükörképét. Igazoljuk, hogy az  $O$ ,  $M$ ,  $D$  és  $C_1$  pontok egy körre illeszkednek.

3. Igazoljuk, hogy minden  $n \geq 2$  egész számra:

$$\sqrt{1 - \frac{1^2}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{2^2}{n^2}} + \dots + \sqrt{1 - \frac{(n-1)^2}{n^2}} > \frac{3n-4}{4}.$$

Valamennyi feladat 7 pontot ér.