A 2018/2019. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
első forduló

MATEMATIKA III. KATEGÓRIA
(a speciális tanterv szerint haladó gimnazisták)

Javítási-értékelési útmutató

Kérjük a javító tanárokat, hogy a feladatok javításakor vegyék figyelembe a versenyzők számára kiadott tájékoztatót. Külön is felhívjuk szíves figyelmüket arra, hogy minden feladatra csak egy helyes megoldásért jár a megfelelő pontszám. Kérjük, hogy a dolgozatokon konkrétan jelezzék a hibákat és az egyes feladatokra adott pontszámot, a dolgozat kijavítása után pedig töltsék ki a dolgozathoz mellékelt értékelő lap rovatait. A dolgozatokat nem kell osztályzattal minősíteni. A pontszámok indokolt esetben bonthatók.

A III. kategóriában versenyző tanulók dolgozatait 12 ponttól kell továbbküldeni az iskolákból, közvetlenül az OKTV Matematika III., Oktatási Hivatal, 1363 Budapest, Pf. 84. címre. A feltételeknek megfelelő dolgozatok közül azonban csak azok küldhetők tovább, amelyek tartalmazzák legalább két feladat lényegében teljes (5–7 pontos) megoldását. Tájékoztatásul megjegyezzük, hogy a versenykiírás alapján a versenybizottság legfeljebb 50 versenyzőt juttathat be a döntőbe.

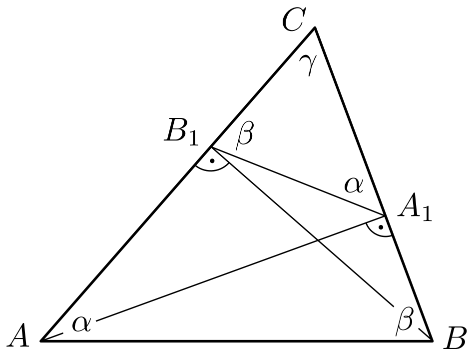
A pontozási útmutatóban nem szereplő más helyes megoldás vagy megoldásrészlet esetén az arányos pontszámot szíveskedjenek megadni.

Budapest, 2018. november A versenybizottság

1. feladat
A hegyesszögű ABC háromszög A, illetve B csúcsából húzott magasságok talppontjai A_1, illetve B_1. Bizonyítsuk be, hogy

$$CA_1 \cdot AB_1 + CB_1 \cdot BA_1 = AB \cdot A_1B_1 \,.$$

Első megoldás: Thalész tétele miatt az A_1, B_1 talppontok az AB átmérőjű körre illeszkednek. A háromszög hegyesszögű volta miatt A_1 és B_1 a megfelelő oldalak belső pontjai, ezért A, B, A_1 és B_1 ebben a sorrendben egy húrnégyszög csúcsai. Legyenek α, β



és γ a háromszög szögei rendre az A, B, illetve C csúcsnál, ekkor tehát $B_1A_1C\sphericalangle = \alpha$ és $A_1B_1C\sphericalangle = \beta$. (2 pont)

Az A_1B_1C háromszögben a szinusztétel alapján

$$CA_1 = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}A_1B_1 \quad \text{és} \quad CB_1 = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}A_1B_1$$

következik. (1 pont)

Az ABB_1, ABA_1 derékszögű háromszögekben $AB_1 = AB\cos\alpha$, illetve $BA_1 = AB\cos\beta$. (1 pont)

Ezeket a CA_1-re és CB_1-re kapott formulákkal összeszorozva és összeadva a

$$CA_1 \cdot AB_1 + CB_1 \cdot BA_1 = \left(\frac{\sin\beta\cos\alpha}{\sin\gamma} + \frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\gamma}\right) AB \cdot A_1B_1$$

eredményt kapjuk, (2 pont)
ahol $\sin\beta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta)$ és $\alpha+\beta = 180^\circ - \gamma$ alapján a zárójelben szereplő kifejezés 1-gyel egyenlő. (1 pont)

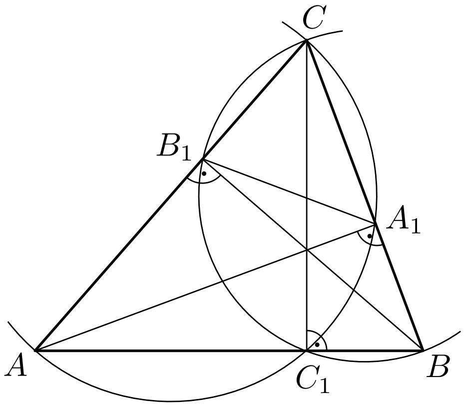
Második megoldás: Legyen CC_1 a harmadik magasság. Mivel a háromszög hegyesszögű, az A_1, B_1, C_1 talppontok a megfelelő oldalak belső pontjai. Thalész tétele miatt A_1 és B_1 az AB átmérőjű körre, B_1 és C_1 a BC átmérőjű körre, C_1 és A_1 a CA átmérőjű körre illeszkedik. Az ABA_1B_1 négyszög húrnégyszög, és így a szögek egyenlősége folytán az A_1B_1C háromszög hasonló az ABC háromszöghöz. Jelöljük λ-val a hasonlóság arányát, ekkor

$$\lambda = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{CA_1}{AC} = \frac{CB_1}{BC}\,. \qquad \text{(2 pont)}$$

Szorozzuk meg AB-vel az $AC_1 + C_1B = AB$ egyenlőséget: $AC_1 \cdot AB + C_1B \cdot AB = AB^2$. Itt a bal oldal első tagja az A pont hatványa a BC átmérőjű körre nézve. Ugyanezt a hatványt az AC szelőn leolvasva az első tag helyett az $AC \cdot AB_1$ szorzatot írhatjuk. A második tag hasonló módon a $CB \cdot BA_1$ szorzattal helyettesíthető. Így az

$$AC \cdot AB_1 + CB \cdot BA_1 = AB^2$$

képletet kapjuk. (3 pont)



Szorozzuk meg mindkét oldalt λ-val. Ha a három tagban a λ-ra kapott háromféle hányados közül az alkalmasat használjuk mint szorzót, akkor ebből éppen a kívánt

$$CA_1 \cdot AB_1 + CB_1 \cdot BA_1 = AB \cdot A_1B_1$$

eredmény következik. (2 pont)

2. feladat
Keressük meg az összes nemnegatív egész számokból álló k, l, m számhármast, amelyre

$$13^k + 43^l = 2018^m\,.$$

Megoldás: Mind 13, mind 43 hatványainak a 3-mal vett osztási maradéka 1, ezért a bal oldal 2-vel kongruens modulo 3. A jobb oldal páratlan m esetén 2-vel, páros m esetén 1-gyel kongruens modulo 3, ezért m-nek páratlannak kell lennie. (1 pont)

Vizsgáljuk az egyenletet modulo 7. A 43 hatványai 1 maradékot adnak 7-tel osztva, míg 13^k kongruens (-1)-gyel vagy 1-gyel modulo 7, aszerint hogy k páratlan vagy páros. Mivel 2018 hatványai nem oszthatók 7-tel, ezért k szükségképpen páros. (2 pont)

Most vizsgáljuk az egyenletet modulo 8. Mivel k páros, ezért $13^k = (8 \cdot 21 + 1)^{k/2}$ nyolcas maradéka 1. A bal oldalon a másik tag, $43^l = (8 \cdot 5 + 3)^l$ nyolcas maradéka 3 vagy 1 attól függően, hogy l páratlan vagy páros. Így $13^k + 43^l$ nyolcas maradéka csak 4 vagy 2 lehet. A jobb oldalon egy páros szám m-edik hatványa áll, ami osztható 8-cal, ha $m \geq 3$. Ezért az m kitevő értéke 3-nál kisebb. (3 pont)

Tehát csak $m = 1$ lehetséges. Mivel $43^3 > 13^3 > 2018$, csak $k, l \leq 2$ jöhet szóba. Ha $k = l = 2$, akkor $13^k + 43^l$ éppen 2018-cal egyenlő, különben kisebb. Ezért a feladat megoldását jelentő egyetlen számhármas a $k = 2$, $l = 2$, $m = 1$. (1 pont)

3. feladat
Egy városban n tűzoltóállomás van. Bármelyik kettő közé építhetünk vízvezetéket. Percenként c liter víz szállítására képes vezeték építése bármely két állomás között c tallérba kerül. A polgármester olyan hálózat tervezésére írt ki pályázatot, hogy vészhelyzet esetén lehetséges legyen egy tetszőleges tűzoltóállomásból tetszőleges másikba percenként 1000 liter vizet szállítani. Mennyibe kerül a legolcsóbb ilyen tulajdonságú vízvezetékhálózat?

Megoldás: Belátjuk, hogy a legolcsóbb, a feladat kívánalmainak eleget tevő vízvezetékhálózat ára $500n$ tallér. Tegyük fel először, hogy $n = 2$. Ekkor a két tűzoltóállomást összekötő, percenként 1000 liter víz kapacitású vezeték kielégíti a feladat feltételeit. Ennek az ára $500n = 1000$ tallér, és ennél olcsóbb megoldás nyilván nincs. (1 pont)

Legyen most $n \geq 3$. Helyezzük képzeletben a tűzoltóállomásokat egy kör kerületére. A kör mentén szomszédos tűzoltóállomások közé építsünk egy-egy percenként 500 liter víz szállítására alkalmas vezetéket. Ez a vízvezetékhálózat kielégíti a feladat feltételeit. Valóban, egy tetszőleges tűzoltóállomásból egy tetszőleges másikba az őket összekötő két körív mentén el tudunk juttatni percenként összesen 1000 liter vizet. Ennek a vízvezetékrendszernek az ára éppen $500n$ tallér. (3 pont)

Belátjuk végül, hogy $500n$ tallérnál olcsóbb megoldás nem létezik. Tekintsünk ugyanis egy a feladat feltételeinek eleget tevő vízvezetékhálózatot. Ebben egy tetszőlegesen kiválasztott tűzoltóállomásba befutó összes vízvezeték árának összege legalább 1000 tallér kell hogy legyen. Valóban, ellenkező esetben nem volna lehetséges percenként 1000 liter vizet eljuttatni a választott tűzoltóállomásra. Adjuk össze ezeket a költségeket mind az n tűzoltóállomásra. Ekkor minden vízvezetéket pontosan kétszer számoltunk, ezért a teljes vízvezetékhálózat ára legalább $500n$ tallér. (3 pont)

4. feladat
Egy háromszög határvonalán két pontot átellenesnek nevezünk, ha a határvonal mentén mért távolságuk éppen a kerület fele. Mutassuk meg, hogy bármely háromszögben van két átellenes pont, amelyek távolsága legfeljebb a kerület negyedével egyenlő.

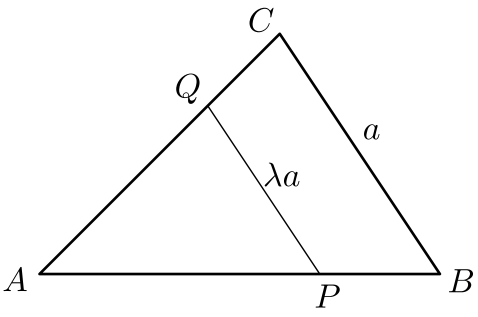
Első megoldás: Az ABC háromszög betűzését úgy választjuk, hogy a csúcsokkal rendre szemközti a, b, c oldalhosszakra $a \leq b, c$ teljesüljön. Legyen $k = a + b + c$ a háromszög kerülete. Megmutatjuk, hogy választhatunk olyan P és Q átellenes pontokat az AB, illetve AC oldalon, hogy $PQ \leq (3/4)a$ teljesüljön. Ekkor $a \leq k/3$ miatt $PQ \leq k/4$, vagyis a P, Q pontpár megfelel a kívánalmaknak. (2 pont)

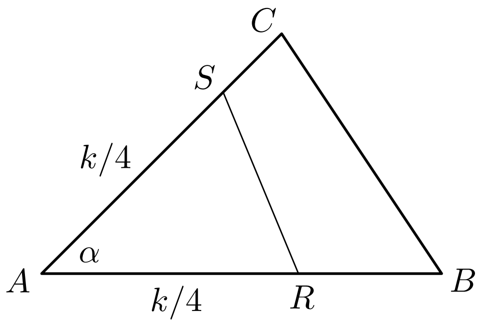
Mivel $AB + AC = c + b > k/2$, a B, C pontpárt az A középpontból alkalmas $\lambda < 1$ arányban kicsinyítve elő tudunk állítani egy átellenes pontpárt. Az ehhez szükséges λ arányt a $k/2 = \lambda(b + c)$ egyenlet adja meg. (3 pont)

Álljon tehát elő P és Q a B, illetve C csúcsból az A középpontú, $\lambda = k/(2b + 2c)$ arányú középpontos hasonlósággal. Ekkor $a \leq b, c$ miatt

$$\lambda = \frac{1}{2} \cdot \frac{a+b+c}{b+c} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a}{b+c}\right) \leq \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4},$$

tehát valóban $PQ = \lambda a \leq (3/4)a$. (2 pont)





Második megoldás: Legyen most is az ABC háromszögben $a \leq b, c$, ekkor az A-nál lévő α szögre $\alpha \leq 60°$ teljesül. A kerületet k-val jelölve a háromszögegyenlőtlenség felhasználásával $k = (a + b) + c < (a + b) + (a + b) = 2a + 2b \leq 4b$, és hasonlóan $k < 4c$.

(3 pont)

Emiatt felmérhetjük az A csúcsból kiinduló mindkét oldalra A felől a $k/4$ távolságot, és így az átellenes R és S pontokat kapjuk. Az RSA háromszög egyenlő szárú, és az A-nál lévő α szárszöge legfeljebb $60°$-os. Az alap emiatt nem hosszabb a szárnál, vagyis $RS \leq k/4$.

(4 pont)

5. feladat

Adott m-hez melyik az a legkisebb k egész szám, amelyre igaz a következő állítás: Akárhogyan színezzük ki pirossal és kékkel az $1, 2, \ldots, k$ számokat, biztosan található olyan $1 \leq a_1 < \ldots < a_m < b_1 < \ldots < b_m \leq k$, hogy az a_i-k egyszínűek, a b_j-k is egyszínűek (de nem feltétlenül azonos színűek az a_i-kkel), és $b_m - b_1 \geq a_m - a_1$.

Megoldás: Azt fogjuk belátni, hogy a szóban forgó minimum $k = 5m - 3$.

Először bebizonyítjuk, hogy $k = 5m - 3$ esetén az állítás igaz. Ehhez tekintsük az $1, 2, 3, \ldots, 5m - 3$ számok egy színezését.

Az első $2m - 1$ szám között biztosan van m darab olyan, amelyek azonos színűek. Ezzel tehát találtunk olyan egyszínű m-est, amelynek a két szélső eleme közti távolság legfeljebb $2m - 2$. Legyenek ezek az a_i-k. Most tekintsük az utolsó $3m - 2$ darab számot. Ha valamelyik szín ezek között csak legfeljebb $(m - 1)$-szer szerepel, akkor a másik színnek legalább $(2m - 1)$-szer kell előfordulnia, ezért ez utóbbiak közül kiválaszthatunk egy egyszínű m-est, amelynek a szélső pontjai közt a különbség legalább $2m - 2$. Ezeket b_j-knek választva két megfelelő szám-m-est találtunk.

(2 pont)

Feltehetjük tehát, hogy mindkét szín legalább m-szer előfordul az utolsó $3m - 2$ darab szám, azaz a $2m$, $2m + 1$, …, $5m - 3$ számok színezésében. Nézzük az utolsót, az $5m - 3$ számot. Ha van vele megegyező színű a $2m$, $2m+1$, …, $3m-1$ számok között, akkor legyen b_1 a legkisebb ilyen, $b_m = 5m - 3$, és a többi b_j-t válasszuk ki tetszőlegesen a közöttük lévő legalább $m - 2$ darab velük egyszínű szám közül. Ekkor $b_m - b_1 \geq (5m - 3) - (3m - 1) = 2m - 2$, tehát az előre rögzített a_i-k és ezek a b_j-k eleget tesznek az előírásoknak.

(1 pont)

Csak akkor nem kaptunk még megfelelő m-eseket, ha a $2m - 1$ után következő m darab szám, $2m$, $2m + 1$, …, $3m - 1$ mind azonos színű. Ekkor viszont (a korábbiak helyett) ezt az m számot választhatjuk a_i-knek. A $3m-1$-nél nagyobb számok között továbbra is kell legalább m darab ezekkel ellentétes színű számnak lennie. Ezek közül most már tetszőlegesen választhatjuk az m darab b_j-t, ekkor $b_m - b_1 \geq m-1 = a_m - a_1$ teljesül.

(1 pont)

Most belátjuk, hogy $k \leq 5m-4$ esetén az állítás nem igaz. Ezt nyilván elegendő a $k = 5m-4$ esetre vonatkozó színezés megadásával tisztázni.

Színezzük az első $2m-1$ számot felváltva pirossal és kékkel (ezzel eddig m számot színeztünk pirosra és $(m-1)$-et kékre), a következő $2m-2$ szám legyen kék, és végül az utolsó $m-1$ legyen piros.

$$\underbrace{p\ k\ p\ k\ \dots\ k\ p}_{2m-1}\ \underbrace{k\ k\ \dots\ k}_{2m-2}\ \underbrace{p\ p\ \dots\ p}_{m-1}$$

Azt állítjuk, hogy ezek közül nem lehet a feladat kívánalmai szerint kiválasztani két m hosszúságú egyszínű sorozatot. Először is nem lehet mindkét m-es piros, mert összesen csak $2m-1$ piros pont van. Esetszétválasztást végzünk.

Tegyük fel először, hogy az a_i-k pirosak. Ekkor a b_j-knek kéknek kell lenniük. Az a_i-k szükségképpen mind az első $2m-1$ szám közül kerülnek ki, és így $a_m - a_1 = 2m-2$. Az ezeknél nagyobb kékre színezett számok között a legnagyobb különbség viszont csak $2m-3$, ezért a b_j-k nem választhatók ki a kívánt módon.

Legyenek most az a_i-k kékek. Ha a b_j-ket a piros számok közül akarnánk kiválasztani, akkor ezek csak az utolsó $m-1$ szám közül kerülhetnének ki, ami lehetetlen.

Végül ha az a_i-k is és a b_j-k is kék színűek volnának, akkor tegyük fel, hogy az a_i-k között l darab szerepel az $1, 2, \dots, 2m-1$ számok közül és $m-l$ darab a $2m, 2m+1, \dots, 4m-3$ számok közül. Ekkor egyrészt $a_m - a_1 = (a_l - a_1) + (a_m - a_l) \geq (2l-2) + (m-l) = m+l-2$, másrészt $b_1 > a_m \geq 3m-l-1$ és $b_m \leq 4m-3$ miatt $b_m - b_1 \leq (4m-3) - (3m-l) = m+l-3$, tehát ekkor sem érhető el, hogy $a_m - a_1 \leq b_m - b_1$ teljesüljön. (3 pont)