Oktatási Hivatal

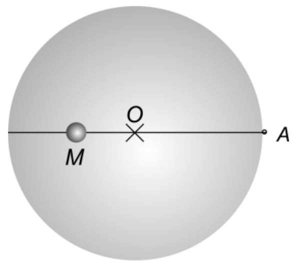
A 2011/2012. tanévi FIZIKA Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny második fordulójának feladatai és megoldásai fizikából

II. kategória

A dolgozatok elkészítéséhez minden segédeszköz használható. Megoldandó az első két feladat és a 3/A és 3/B sorszámú feladatok közül egy szabadon választott. Ha valaki mind a 3/A és 3/B megoldást beadja, e kettő közül csak a több pontot elérő megoldást vesszük figyelembe.

Minden feladat teljes megoldása 20 pontot ér.

1. *Képzeljük el, hogy a Föld tömegű* ($M = 6 \cdot 10^{24}$ kg) *és méretű* ($R = 6400$ km) *bolygó belső szerkezete egészen más, mint a Földé: a belsejében a tömeg egy igen sűrű magban koncentrálódik, és a többi része igen könnyű anyagból áll. A mag nem a geometriai középpontban* (O) *helyezkedik el, hanem az Egyenlítő síkjában az M pontban, a középponttól* 3200 km-*re, ami a bolygó sugarának a fele.*



a) Mekkora sebességgel kell elindítanunk egy műholdat az ábrán látható A pontból, hogy a műhold körpályán keringjen? (Az M, O és A pontok egy átmérőre illeszkednek. A számítás során a légkör hatását és a bolygó tengely körüli forgását ne vegyük figyelembe sem most, sem a további kérdésekre adott válaszok során!)

b)Mekkora minimális sebességgel indíthatjuk a műholdat az A pontból, hogy mozgása során a műhold ne ütközzön a bolygó igen könnyű anyagába?

c) A minimális sebességgel indított műhold legfeljebb milyen messze távolodik el a bolygó felületétől?

Megoldás: *a)* Írjuk fel a mozgásegyenletet $\frac{3}{2}R$ sugarú körpályára:

$$f\frac{mM}{\left(\frac{3}{2}R\right)^2} = m\frac{v_{\text{körpálya}}^2}{\frac{3}{2}R},$$

amiből a körpályán történő mozgáshoz szükséges sebesség (ahol v_I az első kozmikus sebesség):

$$v_{\text{körpálya}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{fM}{R}} = \sqrt{\frac{2}{3}}v_\mathrm{I} \approx \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot (7{,}9\ \text{km/s}) \approx \mathbf{6{,}5\ km/s}.$$

b) A minimális sebességgel történő indításkor a műhold olyan ellipszis pályára kerül, amelynek az indítás helyén éppen a „Föld” egyenlítői főköre adja meg a pályához legjobban illeszkedő kör, az úgynevezett simulókör sugarát. Tehát a mozgásegyenletet így írhatjuk fel:

$$f\frac{mM}{\left(\frac{3}{2}R\right)^2} = m\frac{v_{\min}^2}{R},$$

amiből a minimális indítási sebesség kiszámítható:

$$v_{\min} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{fM}{R}} = \frac{2}{3}v_\mathrm{I} \approx \frac{2}{3} \cdot (7{,}9\ \text{km/s}) \approx \mathbf{5{,}3\ km/s}.$$

c) A minimális sebességgel indított műhold a kezdőpillanatban ellipszis pályája nagytengelyének egyik végpontjában van. Legjobban akkor távolodik el a „Földtől”, ha a nagytengely másik végpontjába kerül, ahol a műhold sebessége maximális ($v_{\max}$). Ezt a pontot az energia és a perdület megmaradásának felírása segítségével számíthatjuk ki:

$$-f\frac{mM}{\frac{3}{2}R}+\frac{1}{2}mv_{\min}^2=-f\frac{mM}{\frac{1}{2}R+h}+\frac{1}{2}mv_{\max}^2$$

$$\frac{3}{2}Rv_{\min}=\left(\frac{1}{2}R+h\right)v_{\max}.$$

Az egyenletrendszer megoldása megadja a műhold maximális eltávolodását a „Föld” felületétől:

$$h=\frac{R}{4}=\mathbf{1600\ km}.$$

Megjegyzések:

i) A műhold a „Föld” felszínétől számított legtávolabbi pontban fele akkora távolságra van a vonzócentrumtól $\left(\frac{1}{2}R+h=\frac{3}{4}R\right)$, mint az indításkor $\left(\frac{1}{2}R+R=\frac{3}{2}R\right)$, tehát itt a sebessége az indítási sebesség kétszerese:

$$v_{\max}=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{fM}{R}}=\frac{4}{3}v_{\mathrm{I}}\approx\frac{4}{3}\cdot(7{,}9\ \mathrm{km/s})\approx 10{,}5\ \mathrm{km/s}.$$

ii) Ismeretes, hogy a nagytengely végpontjaiban a simulókör sugara $\frac{b^2}{a}$ alakban adható meg, ahol *b* a fél kistengely, *a* pedig a fél nagytengely $\left(2a=2R+\frac{R}{4}=\frac{9}{4}R\right)$. Így meghatározhatjuk a műhold ellipszis pályájának fél kistengelyét is:

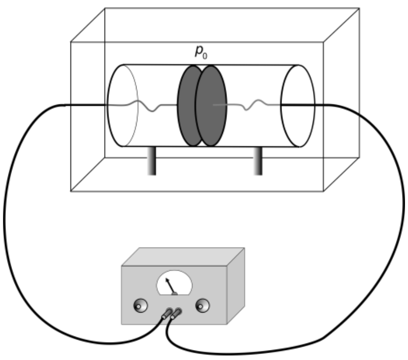
$$\frac{b^2}{a}=\frac{b^2}{\frac{9}{8}R}=R \qquad\rightarrow\qquad b=\frac{3}{2\sqrt{2}}R\approx 1{,}06R.$$

iii) Ismeretes az is, hogy ellipszis pálya esetén a teljes energia csak a nagytengely hosszától függ $\left(E_{\text{teljes}}=-f\frac{mM}{2a}\right)$. Ezt felhasználva egyszerűen kiszámítható a nagytengely:

$$E_{\text{teljes}}=-f\frac{mM}{2a}=-f\frac{mM}{\frac{3}{2}R}+\frac{1}{2}mv_{\min}^2=-f\frac{mM}{\frac{3}{2}R}+\frac{1}{2}m\frac{4fM}{9R}=-f\frac{mM}{\frac{9}{4}R},$$

amiből leolvasható, hogy $2a=\frac{9}{4}R$.

2. *Elektromosan szigetelő anyagból készült, hővezető falú,* R = 10 cm *sugarú, vízszintes cső nyugszik* $p_0=10^{-3}$ Pa *nyomású,ritkított levegőjű környezetben. A cső belsejében két jól záró hővezető és elektromosan is vezető, súrlódásmentesen mozgó, lapszerű, merev dugattyú között levegő van. A dugattyúk egymástól* x_0 = 2 cm *távolságra vannak. Igen nagy precizitást igénylő vákuumfizikai kísérlet során a dugattyúk közepét egyenáramú feszültségforráshoz kapcsoljuk, majd az áramforrás feszültségét igen lassan zérusról* U = 150 V *értékre növeljük, miközben a környezet hőmérsékletét állandó értéken tartjuk.*



a) Határozzuk meg a dugattyúk távolságát a végállapotban! Ebben az állapotban a feszültségforrást lekapcsoljuk a rendszerről, majd a környezet hőmérsékletét növelni kezdjük mindaddig, amíg a dugattyúk távolsága ismét a kezdeti x_0 érték lesz. Közben a környezet nyomását változatlan értéken tartjuk.

b) Mekkora hőt vesz fel a dugattyúk közti gáz az utóbbi folyamat során?

Megoldás:

a) Az $x_0 << 2R$ választás adja az (1) – (3) összefüggések létjogosultságát. A (egyik) dugattyú q töltése és az U feszültség közötti kapcsolat (pl. a síkkondenzátor kapacitását felhasználva)

$$q = \frac{\varepsilon_0 AU}{x}, \tag{1}$$

ahol x a dugattyúk távolsága.

A dugattyúk közti térben a térerősség:

$$E = \frac{U}{x}. \tag{2}$$

A dugattyúk közt ható vonzóerő:

$$F = q\frac{1}{2}E. \tag{3}$$

(Az ½ szorzó azért jön be, mivel ez a térerő csak a legközelebbi töltésekre hat, a távolabbi töltésekre kisebb erőt fejt ki, a legtávolabbiakra már nullát.)

A dugattyú egyensúlyának (szimmetria okokból elég az egyiket vizsgálni) feltétele:

$$p_0 A + F = pA, \tag{4}$$

ahol

$$A = R^2\pi. \tag{5}$$

Az (1) – (4) egyenletekből

$$p = p_0 + \frac{\varepsilon_0 U^2}{2x^2}. \tag{6}$$

adódik.

Mivel a környezet hőmérséklete állandó, a henger és a dugattyúk hővezetők, és a folyamat lassú érvényes a Boyle-Mariotte törvény:

$$p_0 x_0 A = pxA. \tag{7}$$

A (6) és (7) összefüggéseket felhasználva az x távolságra

$$x = \frac{1}{2}x_0\left(1 + \sqrt{1 - \frac{2\varepsilon_0 U^2}{p_0 x_0^2}}\right)$$

adódik, numerikusan $x = \mathbf{1{,}1\ cm}$.

b) Az állandó nyomású folyamat során a dugattyúk közt lévő gáz által végzett munka:

$$W' = pA(x_0 - x) = \left(p_0 + \frac{\varepsilon_0 U^2}{2x^2}\right)A(x_0 - x). \tag{9}$$

A bezárt gáz belső energiájának növekedése:

$$U_2 - U_1 = \frac{5}{2}pA(x_0 - x) = \frac{5}{2}W'. \tag{10}$$

A gáz által felvett hő pedig (5)-t is figyelembe véve

$$Q = U_2 - U_1 + W' = \frac{7}{2}W' = \frac{7}{2}\left(p_0 + \frac{\varepsilon_0 U^2}{2x^2}\right)A(x_0 - x) = 1{,}901\cdot 10^{-6}\,\mathrm{J} = \mathbf{1{,}901\ \mu J.} \tag{11}$$

3/A *Vízszintes talajon álló, könnyen gördülő, de kezdetben rögzített kiskocsira helyezett, R sugarú, félgömb alakú vájatba egy m tömegű vékony rudat helyezünk az ábra szerint úgy, hogy a rúd A végpontja a félgömb peremére, B végpontja a legmélyebb pontjára támaszkodik. A rudat lökésmentesen elengedjük. A súrlódástól mindenhol eltekinthetünk.*

a) Mekkora erőt fejt ki a rúd A *és* B *végpontja a rögzített vájat felületére*

α) közvetlenül az elengedés utáni pillanatban,

β) akkor, amikor a rúd éppen vízszintessé válik?

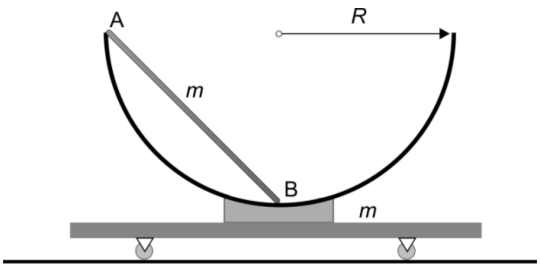
b) Mekkora erőt fejt ki a rúd A *és* B *végpontja a vájat felületére,*

γ) közvetlenül az elengedés utáni pillanatban,

δ) akkor, amikor a rúd éppen vízszintessé válik,

ha a pálca elengedése előtt a kocsi rögzítését feloldjuk?

A kocsi tömege a vájattal együtt szintén m, ugyanakkora, mint a pálca tömege.
(A kiskocsi kerekeinek tömege, a kerekek mérete elhanyagolható.)



Megoldás.

a) A félgömb alakú vájat szimmetriájából következik, hogy a rúd mozgása során mindvégig ugyanabban a függőleges síkban marad. Az elengedés pillanatában a rúdnak még nincs sebessége, és gyorsulva indul a kényszerfeltétel által megszabott pályán. Gyorsulását és szöggyorsulását a nehézségi erő és a végpontjaiban ható kényszererők eredője, ill. a tömegközéppontra vonatkozó forgatónyomatéka szabja meg.

α) A tömegközéppont gyorsulását két komponenséből tehetjük össze. Az egyes irányokra felírt mozgásegyenletek:

$$mg - K_{\mathrm{B}_0} = ma_{\mathrm{S}y0} \tag{1}$$

$$K_{\mathrm{A}_0} = ma_{\mathrm{S}x0} \tag{2}$$

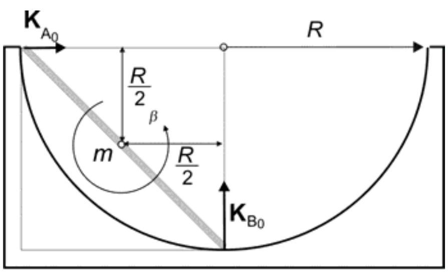
Mivel a tömegközéppontnak nincs kezdeti sebessége, nincs normál (centripetális) gyorsulása sem, tehát a kezdőpillanatban az eredő gyorsulása pályaérintő irányú. A pálca közepe állandó távolságban marad a gömb középpontjától, tehát a pályája kör, és a geometriából következik, hogy éppen rúdirányú, vagyis 45°-os szöget zár be a vízszintessel. Így tehát a kezdőgyorsulás két komponense azonos nagyságú:

$$a_{\mathrm{S}x0} = a_{\mathrm{S}y0}. \tag{3}$$

Ezt felhasználva írhatjuk az erők abszolút értékeire:

$$mg - K_{\mathrm{B}_0} = K_{\mathrm{A}_0} \quad \rightarrow \quad K_{\mathrm{B}_0} = mg - K_{\mathrm{A}_0} \tag{4}$$

Az erők forgatónyomatékai szabják meg a rúd szöggyorsulását. A forgatónyomatékok összege a rúd tömegközéppontjára felírva (l. az 1. ábrát):



1. ábra

$$K_{B_0}\cdot\frac{R}{2}-K_{A_0}\cdot\frac{R}{2}=\frac{1}{12}m\left(R\sqrt{2}\right)^2\beta_0 \quad\rightarrow\quad \left(K_{B_0}-K_{A_0}\right)\cdot\frac{R}{2}=\frac{1}{12}m2R^2\beta_0$$

Egyszerűsítés után a forgatónyomaték-egyenletünk:

$$K_{B_0}-K_{A_0}=\frac{1}{3}mR\beta_0. \tag{5}$$

A szöggyorsulás a pont kerületi gyorsulásának és a körpálya sugarának hányadosa. A kezdőpillanatban

$$a_{S_0}=a_{S_{x0}}\sqrt{2}=\frac{K_{A_0}}{m}\sqrt{2}, \tag{6}$$

így a szöggyorsulás kifejezhető a ható erőkkel:

$$\beta_0=\frac{a_{S_0}}{r}=\frac{a_{S_0}}{R\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{a_{S_0}}{R}\sqrt{2}.$$

Beírva (6)-ből a tömegközéppont kezdőgyorsulásának értékét:

$$\beta_0=\frac{a_{S_0}}{R}\sqrt{2}=\frac{\frac{K_{A_0}}{m}\sqrt{2}}{R}\sqrt{2}=2\frac{K_{A_0}}{mR}. \tag{7}$$

Forgatónyomaték egyenletünkből kapott (5) egyenlet a szöggyorsulás kiküszöbölésével a következő alakot veszi fel:

$$K_{B_0}-K_{A_0}=\frac{1}{3}mR\cdot 2\frac{K_{A_0}}{mR}=\frac{2}{3}K_{A_0}.$$

Innen a két kényszererő (és így a rúd által kifejtett erők) kapcsolata:

$$K_{B_0}=\frac{5}{3}K_{A_0}.$$

Ezt a (4) egyenletbe írva:

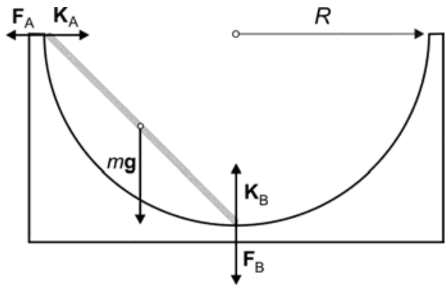
$$\frac{8}{3}K_{A_0}=mg,$$

innen a rúd A pontja által kifejtett erő is:

$$K_{A_0}=\frac{3}{8}mg=\mathbf{0{,}375}\ \boldsymbol{mg},$$

az alsó pontban ható erő pedig:

$$K_{B_0}=\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{8}mg=\frac{5}{8}mg=\mathbf{0{,}625}\,\boldsymbol{mg}.$$



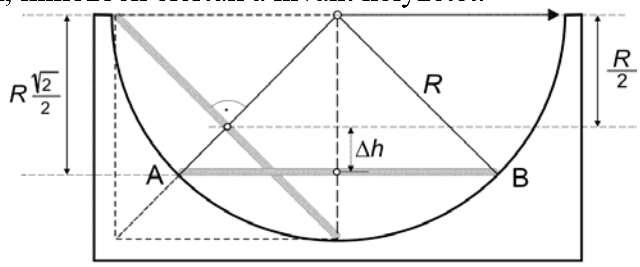
2. ábra

(Vegyük észre, hogy a nagyobbik erő a gömb alján jóval kisebb a rúd súlyánál, hiszen a kezdőpillanatban a rúd tömegközéppontja lefelé gyorsul. A gömb pereménél pedig igen kicsi erők hatnak, mert a rúdra *x* irányban más erő nem hat, mint a gömb kényszerereje.)

β) A rúd tömegközéppontja a vízszintessé vált helyzeten áthaladva maximális sebességgel, ezért zérus érintőleges gyorsulással mozog, csak centripetális gyorsulása van. Tehát a szöggyorsulása is zérus ebben a helyzetben. Ezen átlendülve a kezdeti állapot tükörképe jön létre, majd folytatódik a lengő mozgás.

A vízszintes helyzethez tartozó adatok az energiatételből (munkatételből) kaphatók meg. A kényszererők nem végeznek munkát, kizárólag a nehézségi erő munkája adja a rúd kinetikus energiáját. (A helyzeti energia csökkenése egyenlő a mozgási energia növekedésével, vagyis a vizsgált helyzetbeli mozgási energiával.)

A helyzeti energiaváltozást egyedül a tömegközéppont süllyedése szabja meg, a rúd forgása nem számít bele. (Gondoljuk el két részben a mozgást! Süllyesszük le változatlan helyzetben a megfelelő szintig a rudat! Ekkor csak párhuzamos eltolás jön létre, vagyis a nehézségi erő munkája az mg és süllyedés Δh mértékének szorzata. Ha ezután a tömegközéppont körül a vízszintesig elforgatjuk a rudat, annyi tömeg mozog ugyanannyit felfelé, mint lefelé, vagyis a teljes helyzeti energia már nem változik, miközben elértük a kívánt helyzetet.



3. ábra

A tömegközéppont süllyedése az ábra alapján:

$$\Delta h = R\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{R}{2} = R\frac{\sqrt{2}-1}{2}. \qquad (8)$$

A munkatétel a vízszintes helyzet elfoglalásáig:

$$mg\Delta h = \frac{1}{2}mv_S^2 + \frac{1}{2}\Theta_S\omega^2.$$

Részletezve, (8) felhasználásával:

$$mgR\frac{\sqrt{2}-1}{2} = \frac{1}{2}mv_S^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}m\left(R\sqrt{2}\right)^2\omega^2. \qquad (9)$$

Az itt szereplő ω szögsebesség a tömegközéppont sebességével és pályasugarával kifejezve:

$$\omega = \frac{v_S}{r} = \frac{v_S}{R\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}v_S}{R}.$$

Ezt felhasználva (9) egyenletünk (egyszerűsítések után):

$$gR\left(\sqrt{2}-1\right) = v_S^2 + \frac{1}{3}v_S^2 = \frac{4}{3}v_S^2 \quad \rightarrow \quad v_S^2 = \frac{3}{4}\left(\sqrt{2}-1\right)gR$$

A rúd tömegközéppontja csak centripetális gyorsulást végez, így a kényszererők y komponensei, valamint a nehézségi erő szabják meg a gyorsulás nagyságát. A tömegközéppont gyorsulása a rúd vízszintes helyzetében:

$$a_S = \frac{v_S^2}{r} = \frac{3}{4}\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)gR}{R\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{3}{4}\left(2-\sqrt{2}\right)g\,. \qquad (10)$$

A keresett erők komponenseire:

$$ma_S = 2K_y - mg.$$

Beírva (10)-ből a gyorsulást:

$$m\frac{3}{4}\left(2-\sqrt{2}\right)g=2K_{\mathrm{y}}-mg \quad \rightarrow$$

$$K_{\mathrm{y}}=mg\frac{1}{2}\left[\frac{3}{4}\left(2-\sqrt{2}\right)+1\right]=mg\left[\frac{3}{8}\left(2-\sqrt{2}\right)+\frac{1}{2}\right]=mg\left(\frac{6}{8}-\frac{3}{8}\sqrt{2}+\frac{4}{8}\right)=\frac{10-3\sqrt{2}}{8}mg.$$

A keresett erők nagysága a rúd mindkét végpontjában:

$$K_{\mathrm{A}}=K_{\mathrm{B}}=\frac{K_y}{\sin 45°}=\frac{K_y}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=K_y\sqrt{2}\,,$$

azaz
$$K=\sqrt{2}\cdot\frac{10-3\sqrt{2}}{8}mg=\frac{10\sqrt{2}-6}{8}mg=\frac{5\sqrt{2}\text{-}3}{4}mg\approx\mathbf{1{,}0177}\ \boldsymbol{mg}.$$

A gömbre ható nyomóerők nagysága ugyanekkora, és irányuk a vízszintessel 45°-ot bezáró irányban lefelé mutat. Nagysága 1,01777 *mg*, alig nagyobb, mint a rúd súlya nyugalomban.

Megjegyzés: A félgömb alakú vájat középpontján átmenő, a rajz síkjára merőleges vízszintes egyenes mindvégig pillanatnyi forgástengelye a mozgó rúdnak. A rúdra ható kényszererők nem adnak forgatónyomatékot erre a tengelyre nézve, csak a nehézségi erő (amikor a rúd vízszintes, akkor még a nehézségi erőnek sincs forgatónyomatéka). A pillanatnyi forgástengelyre nézve a Steiner-tétel szerint számíthatjuk ki rúd tehetetlenségi nyomatékát:

$$\Theta=\frac{1}{12}m\left(\sqrt{2}R\right)^2+m\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{2}{3}mR^2.$$

α) Írjuk fel a forgómozgás alapegyenletét, és számítsuk ki a rúd kezdeti szöggyorsulását:

$$M=\Theta\beta \quad\rightarrow\quad mg\frac{R}{2}=\frac{2}{3}mR^2\beta \quad\rightarrow\quad \beta=\frac{3g}{4R}.$$

A szöggyorsulásból azonnal megkaphatjuk a rúd tömegközéppontjának gyorsulását, ami rúdirányú, és 45°-ban lefelé mutat. Ennek $\sqrt{2}$-ed része a gyorsulás vízszintes és függőleges összetevője:

$$a=\frac{R}{\sqrt{2}}\beta=\frac{3g}{4\sqrt{2}} \quad\rightarrow\quad a_x=a_y=\frac{3g}{8}.$$

Ennek segítségével azonnal meghatározhatjuk az A pontnál fellépő erőt: $K_{A_0}=ma_x=\frac{3}{8}mg.$

A B pontnál fellépő erő meghatározása sem sokkal nehezebb:

$$mg-K_{B_0}=ma_y=\frac{3}{8}mg \;\rightarrow\; K_{B_0}=\frac{5}{8}mg.$$

β) Amikor a rúd vízszintes, a mozgási energiáját (a pillanatnyi forgástengelyre felírva) tisztán forgási energiaként kaphatjuk meg:

$$mg\Delta h=\frac{1}{2}\Theta\omega^2 \quad\rightarrow\quad mgR\frac{\sqrt{2}-1}{2}=\frac{1}{3}mR^2\omega^2 \quad\rightarrow\quad \omega^2=\frac{3\left(\sqrt{2}-1\right)g}{2R}.$$

A rúd tömegközéppontjának függőlegesen felfelé mutató centripetális gyorsulása:

$$a_S=r\omega^2=\frac{R}{\sqrt{2}}\cdot\frac{3\left(\sqrt{2}-1\right)g}{2R}=\frac{3\left(2-\sqrt{2}\right)g}{4}.$$

Innen kezdve a megoldás megegyezik a fenti megoldással, de talán többeket meggyőz, hogy ennél a résznél célszerű a pillanatnyi forgástengely használata, mert sokkal rövidebb úton juthatunk el a végeredményig.

b) Ha a kocsi szabadon mozoghat, akkor az elengedés után egyszerre mozog a rúd és a kocsi. A kocsi balra, a rúd jobbra mozdul el, és közben a rúd forgása is beindul. Ezért így meglehetősen nehéz a kényszerfeltételeket felírni. Viszont ha a kocsihoz rögzítjük a vonatkoztatási rendszerünket, akkor a feladat első részéhez hasonló helyzet jön létre. De ennek ára van, hiszen a Newton-törvények nem érvényesek gyorsuló koordinátarendszerben. Mégis alkalmazhatjuk ezt a „trükköt”, ha bevezetünk egy alkalmas fiktív, úgynevezett tehetetlenségi erőt. Ha a kocsi balra mozog $\boldsymbol{a}$ gyorsulással, akkor a kocsihoz rögzített rendszerben úgy írhatjuk fel a mozgásegyenletet, ha a valódi erők mellé még egy (nem kölcsönhatásból származó) erőt is felveszünk, amelynek nagysága $-m\boldsymbol{a}$, ami a rúd tömegközéppontjára hat.

γ) Először nézzük az elengedés utáni pillanatot. A rúd tömegközéppontja gyorsulásának vízszintes összetevője legyen a_x, ami jobbra mutat. Ekkor a kocsi ugyanekkora gyorsulással balra mozog, mert a rúd tömege megegyezik a kocsi tömegével. Üljünk be a kocsival együtt mozgó koordinátarendszerbe, és írjuk fel a rúdra a forgó mozgás alapegyenletét (a forgástengely legyen a félgömb középpontján átmenő vízszintes tengely):

$$mg\frac{R}{2} + ma_x\frac{R}{2} = \Theta\beta = \frac{2}{3}mR^2\beta.$$

Ebben a rendszerben a rúd középpontjának gyorsulása (ami 45 °-ban ferdén lefelé mutat):

$$a_{\mathrm{Tkp}} = \frac{R\beta}{\sqrt{2}}.$$

Ennek a gyorsulásnak a vízszintes, illetve függőleges komponense

$$a_{\mathrm{Tkp}x} = a_{\mathrm{Tkp}y} = \frac{R\beta}{2}.$$

A függőleges erő-összetevőre ezt írhatjuk fel:

$$mg - F_{\mathrm{B}} = m\frac{R\beta}{2}.$$

A vízszintes gyorsulás összetevőre felírható mozgásegyenlet:

$$F_{\mathrm{A}} + ma_x = m\frac{R\beta}{2}.$$

A vízszintes gyorsulás összetevőt a_x nagyságával is kifejezhetjük:

$$\frac{R\beta}{2} = 2a_x.$$

A részletszámítások mellőzésével:

$$a_x = \frac{3}{13}g, \qquad F_{\mathrm{A}} = \frac{3}{13}mg \approx \mathbf{0{,}231}\boldsymbol{mg}, \quad F_{\mathrm{B}} = \frac{7}{13}mg \approx \mathbf{0{,}538}\boldsymbol{mg}.$$

δ) Az energia-megmaradás alapján számolhatjuk a legalsó pontban a mozgási energiát:

$$mgR\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}mv^2\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{12}m\left(\sqrt{2}R\right)^2\omega^2.$$

Most úgy számoltuk a rúd mozgási energiáját, hogy a tömegközéppont haladási mozgási energiájához hozzáadtuk a tömegközéppont körüli forgási mozgási energiát, továbbá kihasználtuk, hogy a kocsi tömege megegyezik a rúd tömegével, tehát a legalsó pontban a rúd tömegközéppontja v-vel jobbra mozog, a kocsi v-vel balra.

A kényszerfeltétel azt jelenti, hogy ha beülünk a kocsival együtt mozgó rendszerbe (ami a rúd legalsó helyzetében éppen nem gyorsul), akkor a rúd két végének a félgömb érintője mentén szabad csak mozognia. Ez az érintő 45 °-os szöget zár be a vízszintessel. Ezért

$$2v = \frac{\sqrt{2}}{2} R\omega .$$

Ezek után már ki tudjuk számítani a v sebességet:

$$v^2 = \frac{3\left(\sqrt{2}-1\right)gR}{10}$$

A kocsihoz rögzített rendszerben a rúd középpontja vízszintesen jobbra mozog $2v$ sebességgel. Ekkor a rúdnak csak függőlegesen felfelé mutató centripetális gyorsulása van. Felírhatjuk a mozgásegyenletet az $F_A = F_B = F$ erők és mg segítségével (a kocsihoz rögzített rendszerben a rúd tömegközéppontja $\frac{R}{\sqrt{2}}$ sugarú körpályán mozog:

$$2\frac{F}{\sqrt{2}} - mg = m\frac{(2v)^2}{\frac{R}{\sqrt{2}}} = \frac{4\sqrt{2}m}{R}v^2 = \frac{4\sqrt{2}m}{R}\cdot\frac{3(\sqrt{2}-1)gR}{10} = \frac{6(2-\sqrt{2})mg}{5}.$$

Ebből már megkaphatjuk a kérdéses erőket:

$$F_A = F_B = F = \frac{17\sqrt{2}\text{-}12}{10}mg \approx \mathbf{1{,}204}\boldsymbol{mg}.$$

3/B *Két egyforma fémrudat helyezünk merőlegesen az egymástól l =* 0,2 m *távolságra futó, igen hosszú, vízszintes sínpárra. Mindkét rúd tömege m =* 0,006 kg, *és a sínek közé eső szakaszuknak az elektromos ellenállása R =* 1 Ω. *Kezdetben a rudak egymástól l =* 0,2 m *távolságra vannak. A sínek ellenállása elhanyagolható, a B =* 0,5 T *indukciójú homogén mágneses tér függőleges. Az egyik rudat v_0 =* 0,4 m/s *sebességgel elindítjuk úgy, hogy távolodjon a másik rúdtól. A rudak súrlódásmentesen mozognak a sínpáron.*

a) Hosszú idő elteltével mekkora lesz a rudak sebessége?

b) Hosszú idő alatt mennyi Joule-hő termelődik a rendszerben?

c) Hosszú idő elteltével milyen messzire távolodnak el egymástól a rudak?

Megoldás:

a) Mindkét rúdra minden időpillanatban azonos nagyságú, de ellentétes irányú erő hat. Ezért a rudak tömegközéppontja állandó, $v_0/2$ nagyságú sebességgel mozog. A kezdetben meglökött rúd lassul, a másik mindvégig gyorsul. Hosszú idő után mindkét rúd $v_0/2$ = **0,2 m/s** nagyságú sebességgel mozog.

b) Ha a rudak sebessége megegyezik, akkor az indukció megszűnik, további hőfejlődés nincs. Belátható, hogy a Joule-hő megegyezik a rudak teljes mozgási energia változásának abszolút értékével. Az indításkor a mozgási energia $\frac{1}{2}mv_0^2$, hosszú idő elteltével pedig

$$2\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{v_0}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{4}mv_0^2,$$

vagyis a teljes mozgási energia a felére csökken (a rugalmatlan ütközéshez hasonlóan). A kezdeti mozgási energia másik fele alakul át Joule-hővé:

$$Q=\frac{1}{4}mv_0^2=\mathbf{2{,}4\cdot 10^{-4}\,J=0{,}24\,mJ.}$$

c) A meglökött rúd sebességét jelöljük v_1-gyel, a másikét v_2-vel!
A tömegközéppont egyenletes mozgása miatt:

$$\frac{v_1+v_2}{2}=\frac{v_0}{2}.$$

$$F=BIl$$

$$I=\frac{U}{2R}$$

$$U=\frac{Bl\left(v_1-v_2\right)\Delta t}{\Delta t}=Bl\left(v_1-v_2\right)$$

$$F=m\frac{\Delta v_1}{\Delta t}=-\frac{B^2l^2}{2R}\left(2v_1-v_0\right)=-\frac{B^2l^2}{R}\left(v_1-\frac{v_0}{2}\right).$$

A negatív előjel azt fejezi ki, hogy a mágneses erő fékezi az elől lévő rudat. Térjünk át a rudak tömegközéppontjához viszonyított sebességre:

$$v_1^*=v_1-\frac{v_0}{2},$$

és vegyük észre, hogy $\Delta v_1^*=\Delta v_1$, továbbá jelöljük a meglökött rúd tömegközépponthoz viszonyított elmozdulását így: x_1^*! Az új változókkal a fenti utolsó egyenlet így írható:

$$m\frac{\Delta v_1^*}{\Delta t}=-\frac{B^2l^2}{R}\cdot\frac{\Delta x_1^*}{\Delta t}.$$

Egyszerűsítsünk Δt-vel, és írjuk be a rúd sebességváltozását hosszú idő után $\left(\Delta v_1^*=-\frac{v_0}{2}\right)$:

$$m\frac{v_0}{2}=-\frac{B^2l^2}{R}\cdot\Delta x_1^*,$$

amiből az elől lévő rúd tömegközépponthoz viszonyított teljes elmozdulása kiszámítható:

$$\Delta x_1^*=\frac{mv_0R}{2B^2l^2}=0{,}12\text{ m}=12\text{ cm}.$$

A hátul lévő rúd (szimmetria okokból) ugyanennyit távolodik a tömegközépponttól, tehát hosszú idő után a két rúd távolsága:

$$\Delta x=l+2\Delta x_1^*=l+\frac{mv_0R}{B^2l^2}=\mathbf{0{,}44\,m=44\,cm.}$$

Megjegyzések:

i) A kezdeti indukált feszültség: $U_0=Blv=0{,}04\text{ V}=40\text{ mV}$. A kezdeti áram: $I_0=U_0/2R=20\text{ mA}$. Tehát a kezdőpillanatban a rudakra ható erő: $F_0=BI_0l=0{,}002\text{ N}$, illetve a rudak kezdeti gyorsulása $a_0=F_0/m=\frac{1}{3}\text{ m/s}^2$. Ha a teljes sebességváltozás ugyanekkora (változatlan) gyorsulással történne, akkor az ehhez szükséges idő $\Delta t=\Delta v/a=0{,}6\text{ s}$ lenne. Eközben a meglökött test (0,3 m/s átlagsebességgel) 18 cm utat tenne meg, a másik pedig (0,1 m/s átlagsebességgel) 6 cm-t, vagyis a távolságuk 12 cm-rel növekedne, így 32 cm-re távolodnának el egymástól. Ez a durva számítás csak arra jó, hogy megbecsülhetjük a kísérlet hely és idő igényét. Gyakorlatilag a folyamat néhány másodperc alatt lezajlik, és ehhez egy-két méter hosszú sín elegendő.

ii) A rendszerben folyó áramnak is van mágneses tere. Becsüljük meg ennek nagyságát úgy, hogy a maximális (I_0 = 20 mA) áramot hosszú egyenes vezetőben folyónak képzeljük, és a tipikus távolságot tekintsük l-nek. A mágneses indukció nagysága:

$$B = \mu_0 \frac{I_0}{2\pi l} = 2 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{T}.$$

A megnyugtatóan kis érték azt mutatja, hogy az indukált áram saját mágneses tere elhanyagolható a külső homogén mágneses térhez képest.

II. forduló pontozási javaslatai

II. kategória

1. feladat.

a) A körmozgáshoz szükséges sebesség meghatározása:	**3 pont**.
b) A bolygó felületéhez illeszkedő kör használata:	**4 pont**
A dinamikai egyenlet helyes felírása:	**4 pont**
A sebesség numerikus megadása:	**2 pont**.
c) Az energia egyenlet felírása:	**3 pont**
A perdület egyenlet felírása:	**2 pont**
A maximális eltávolodás kiszámítása:	**2 pont**
Összesen:	**20 pont.**

2. feladat

a) A dugattyúk közti vonzóerő meghatározása (több lehetőség is van rá):	**4 pont**
A dugattyúk egyensúlyának megfogalmazása:	**2 pont**
Boyle – Mariotte törvény alkalmazása:	**2 pont**
A helyes távolság paraméteresen:	**1 pont**
A helyes távolság numerikusan:	**1 pont**
*b)*A munkavégzés megadása (akár csak paraméteresen):	**3 pont**
A belső energiaváltozás megadása (akár csak paraméteresen):	**3 pont**
Termodinamika I. főtételének helyes alkalmazása:	**2 pont**
A felvett hő megadása (akár csak paraméteresen):	**1 pont**
A helyes numerikus végeredmény:	**1 pont**
Összesen:	**20 pont**

3/A feladat.

α) helyes megoldása:	**4 pont**
β) helyes megoldása:	**5 pont**
γ) helyes megoldása:	**5 pont**
δ) helyes megoldása:	**6 pont**
Összesen:	**20 pont**.

3/B feladat

a) Az azonos nagyságú erők észrevétele:	**3 pont**
A közös sebesség meghatározása:	**2 pont**
b) Az energiaveszteség elvi meghatározása:	**3 pont**
A Joule-hő kiszámítása:	**2 pont**
c) Az egyenletek felírása:	**6 pont**
Az egyenletek megoldása:	**4 pont**.
Összesen:	**20 pont.**