A 2012/2013. Tanévi FIZIKA Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny első fordulójának feladatai és megoldásai

II. kategória

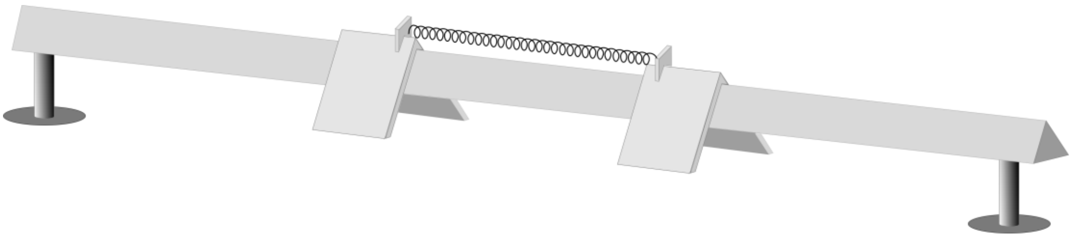
A dolgozatok elkészítéséhez minden segédeszköz használható. Megoldandó az első három feladat és a 4/A és 4/B sorszámú feladatok közül egy szabadon választott. Csak 4 feladat megoldására adható pont. A 4/A és 4/B feladat közül a több pontot elérő megoldást vesszük figyelembe.

1. *Vízszintes, légpárnás sínen két különböző tömegű lovast (háztető alakú, súrlódásmentesen mozgó testet) ideálisnak tekinthető, nyújtatlan, húzó-nyomó rugó köt össze. Az egyik lovast kezünkkel rögzített helyzetben megtartjuk, a másikat eltávolítjuk, majd elengedjük.*

a) Mennyi idő múlva és hol áll meg legközelebb az elengedett test?

Abban a pillanatban, amikor az elengedett test először megáll, a másik lovast is elengedjük.

b) Ezt követően mikor és hol állnak meg legközelebb a lovasok?



Megoldás. Az elengedett test tömege legyem m_1, a kezdetben rögzített test tömege legyen m_2, a rugóállandó (direkciós erő) legyen D, a rugó kezdeti megnyúlása legyen A (ui. a keletkező rezgés amplitúdója).

a) Az elengedett test $t = \pi\sqrt{\frac{m_1}{D}}$ idő múlva áll meg, miközben $2A$ távolságot tesz meg a rögzített test felé.

b) Ebben a pillanatban a rugó összenyomottsága A. A testek elengedése után külső erők hiányában a rendszer tömegközéppontja helyben marad. Mindkét test harmonikus rezgőmozgásba kezd. Az (1)-es test amplitúdója:

$$A_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}A.$$

A (2)-es test amplitúdója:

$$A_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}A.$$

A két test úgy rezeg, mintha mindkettő egy-egy saját rugóhoz lenne kötve, hiszen a tömegközéppont helyben marad. A rugóállandó fordítottan arányos a rugó hosszával, ha egyébként a rugó anyaga, menetsűrűsége, fizikai tulajdonságai változatlanok. Az (1)-es test látszólagos rugóállandója:

$$D_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_2} D.$$

Ugyanígy a (2)-es test látszólagos rugóállandója:

$$D_2 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} D.$$

Könnyen beláthatjuk, hogy a két test rezgésideje azonos:

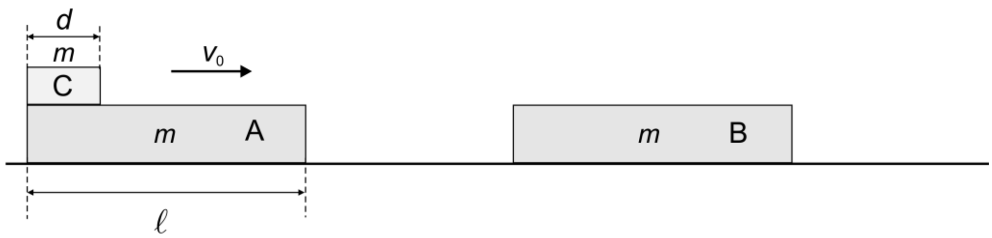
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{D_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{D_2}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 \cdot m_2}{(m_1 + m_2)D}}.$$

Tehát ezek után megállapíthatjuk, hogy a második test elengedése után mindkét test $T/2$ idő múlva áll meg, az (1)-es test $2A_1$ távolságot tesz meg visszafelé, míg a (2)-es test $2A_2$ távolságot tesz meg ellenkező irányban.

2. *Két, egyenként* m = 0,5 kg *tömegű,* l = 60 cm *hosszú (A és B) hasáb nyugszik egy súrlódásmentes vízszintes felületen. Az A hasáb tetején az ábra szerint egy ugyancsak m tömegű kisebb,* d = 10 cm *hosszú téglatest (C) nyugszik. A téglatest és a hasáb közötti súrlódás együtthatója* μ = 0,4. *Ennek a rendszernek* v_0 = 4 m/s *nagyságú sebességet adunk, amellyel az a nyugvó hasábnak (B) ütközik. Az ütközés tökéletesen rugalmas és pillanatszerű. Az ütközés után a téglatest előre csúszik.*

a) Milyen távol lesz egymástól a két hasáb, amikor a téglatest eleje a hasáb másik végéhez ér?

b) Mennyi hő fejlődött a folyamat során?



Megoldás. *a)* Az abszolút rugalmas, pillanatszerű ütközés alatt lényegében csak az *A* és *B* hasáb között lép fel kölcsönhatás, a *C* test által kifejtett erő elhanyagolható az ütközéskor keletkező erők mellett. Az ütközés után a *B* hasáb $u_B = v_0$ = 4 m/s állandó sebességgel távolodik *A*-tól, az *A* hasáb egy pillanatra „megtorpan”, $u_{A0} = 0$ lesz az egyenlő tömegek miatt („sebességcsere”). Ebben a pillanatban elkezd csúszni a *C* test, amelynek u_{C0} kezdősebessége változatlanul v_0 = 4 m/s volt, de a súrlódási erő őt fékezni, az *A* hasábot gyorsítani (sebességét növelni) fogja a továbbiak során mindaddig, amíg a csúszás tart. Keressük a csúszási időt és az elmozdulásokat. Az *A* és *C* test gyorsulásának nagysága az egyenlő tömegek miatt megegyezik, irányuk ellentétes.

Az *A* hasáb útja:

$$S_{\mathrm{A}} = \frac{1}{2}\mu g t^2, \qquad (1)$$

a *C* test útja:

$$S_{\mathrm{C}} = v_0 t - \frac{1}{2}\mu g t^2. \qquad (2)$$

A két út közötti különbség az az út, amelyet a C téglatest tesz meg a hasábhoz viszonyítva. Mivel a széléig csúszik,

$$S_{\mathrm{C}} - S_{\mathrm{A}} = \ell - d$$

(1) és (2) beírásával:

$$v_0 t - \frac{1}{2}\mu g t^2 - \frac{1}{2}\mu g t^2 = \ell - d.$$

Összevonás, rendezés után:

$$\mu g t^2 - v_0 t + \ell - d = 0$$

Innen az eltelt időre adódik:

$$t = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 4\mu g\left(\ell - d\right)}}{2\cdot \mu g} = \frac{4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \pm \sqrt{16\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} - 4\cdot 0,4\cdot 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\left(0,6\ \mathrm{m} - 0,1\ \mathrm{m}\right)}}{2\cdot 0,4\cdot 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = \begin{matrix} 0,8536\ \mathrm{s} \\ 0,1464\ \mathrm{s} \end{matrix}$$

Nyílván csak az egyik érték felel meg a folyamatnak. A helyes gyök kiválasztásának egyik módja a következő:

Visszahelyettesítve az *A* és a *C* test végsebesség képletébe ezeket az értékeket, az lesz a folyamatnak megfelelő adat, amelynél az *A* test sebességére kisebb érték adódik, mint a C test sebessége.

A 0,8536 s értékkel számolva:

$$u_{\mathrm{A}} = \mu g t = 0,4\cdot 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 0,8536\ \mathrm{s} = 3,4144\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},$$

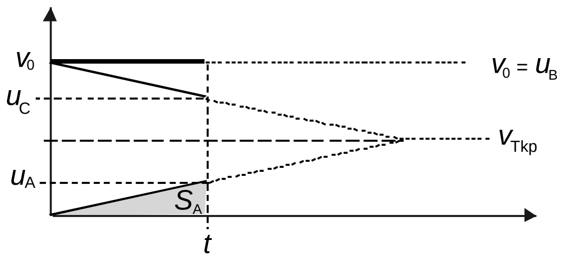
$$u_{\mathrm{C}} = v_0 - \mu g t = 4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 0,4\cdot 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 0,8536\ \mathrm{s} = 0,5856\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Vagyis ezzel a sebességgel nem érhetett a kis test a hasáb túlsó végére. Ellenőrzés a második, a 0,1464 s időértékkel:

$$u_{\mathrm{A}} = \mu g t = 0,4\cdot 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 0,1464\ \mathrm{s} = 0,5856\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},$$

$$u_{\mathrm{C}} = v_0 - \mu g t = 4\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 0,4\cdot 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 0,1464\ \mathrm{s} = 3,4144\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

(Észrevehetjük, hogy a sebességértékek „tükrösek”, de csak a második idővel számoltak felelnek meg a feladatnak.)



Ezzel a két hasáb közötti távolságra

$$D = S_B - S_A = v_0 t - \frac{1}{2}\mu g t^2 = 4\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0{,}1464\ \text{s} - \frac{1}{2} \cdot 0{,}4 \cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}1464^2\,\text{s}^2 = \mathbf{0{,}5429\,m}$$

adódik.

b) A súrlódási erők munkája a mozgási energia megváltozásával egyenlő. Ez az energiacsökkenés a testek felmelegedését okozza. A súrlódási erők ugyan egyenlő nagyságúak, de különböző utakon végzik a munkájukat. Az *A* testre ható súrlódási erő munkája pozitív, a *C* testre hatóé negatív, de ez utóbbi munkavégzése hosszabb úton történik, összmunkájuk tehát negatív, így csökken a rendszer mozgási energiája. A fejlődő hő tehát:

$$Q = -\Delta E_{\text{kin}} = -\left(\frac{1}{2}m_A u_A^2 + \frac{1}{2}m_C u_C^2 - \frac{1}{2}m_C v_0^2\right) = -\frac{1}{2}m\left(u_A^2 + u_C^2 - v_0^2\right) =$$

$$-\frac{1}{2} \cdot 0{,}5\ \text{kg}\left(0{,}5856^2 + 3{,}4144^2 - 4^2\right)\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 0{,}9997\ \text{J} \approx 1\text{J}.$$

A fejlődő hőt megkaphatjuk a súrlódási munkából is:

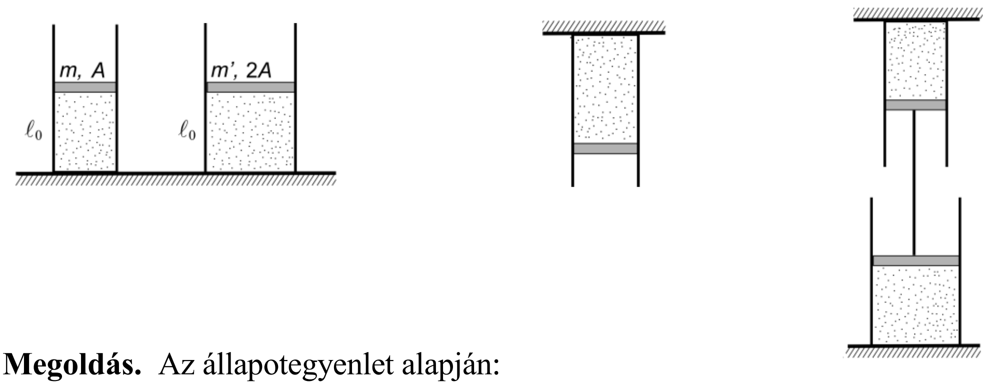
$$Q = \mu m g\left(\ell - d\right) = 0{,}4 \cdot 0{,}5\ \text{kg} \cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}5\ \text{m} = 1\ \text{J}.$$

3. *Az ábrán látható függőleges hengerekben azonos anyagi minőségű, azonos sűrűségű, ideálisnak tekinthető gázt súrlódásmentesen mozgó dugattyú zár el a külső levegőtől, melynek nyomása* p_0=10^5Pa. *A két gázoszlop hossza egyaránt* l_0 = 40cm, *hőmérsékletük is azonos,* 27 $^\circ$C. *A szűkebb henger keresztmetszete A* = 0,2 dm^2*, a másiké ennek duplája. A szűkebb hengerben lévő dugattyú tömege m* = 4 kg.

a.) Mekkora a másik hengerben lévő dugattyú m' tömege?

b.) Mekkora lesz az első hengerben lévő gázoszlop hossza, ha állandó hőmérsékleten úgy fordítjuk meg, hogy a dugattyúval lezárt vége kerüljön alulra?.

c.) Ekkor a két henger dugattyúját egy, a tömegükhöz képest elhanyagolható tömegű rúddal úgy rögzítjük egymáshoz, hogy közben a gázok eddigi nyomása ne változzon. Ezt követően az alsó hengerbeli gáz hőmérsékletét 177 $^\circ$C*-ra növeljük, miközben a felsőben lévő gáz hőmérsékletét állandó értéken tartjuk. Mennyivel mozdul el a „kettős” dugattyú?*



Megoldás. Az állapotegyenlet alapján:

$$pAl = nRT, \text{ vagy } pV = \frac{m}{M}RT,$$

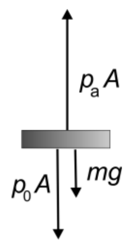
ahonnan

$$pM = \frac{m}{V}RT,$$

tehát $pM = \rho RT.$

Mivel azonos anyagi minőségűek (M azonos), azonos sűrűségűek (ρ azonos) és azonos hőmérsékletűek (T = 300 K azonos), ezért nyomásuk is megegyezik.

a) A dugattyú egyensúlya miatt



$$p_0 A + mg = p_a A$$

(p_a a dugattyú alatti gáz nyomása), a tágabb tartályra pedig

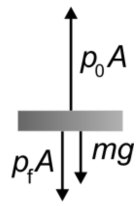
$$p_0 2A + m'g = p_a 2A.$$

A kettőt összevetve $m' = 2m =$ **8kg**.

b) A tartályt „fejre” állítása közben pV nem változik (T = állandó), így pl is állandó. Kezdetben

$$p_0 A + mg = p_a A$$

volt, az egyensúly feltétele, ahonnan



$$p_a = p_0 + \frac{mg}{A} = 10^5\text{Pa} + \frac{40\text{N}}{2\cdot 10^{-3}\text{m}^2} = 1{,}2\cdot 10^5\text{Pa}.$$

A tartály megfordítása után a dugattyú egyensúlya miatt

$$p_0 A = mg + p_f A$$

(p_f a dugattyú feletti gáz nyomása). Ebből

$$p_f = p_0 - \frac{mg}{A} = 10^5\text{Pa} - \frac{40\text{N}}{2\cdot 10^{-3}\text{m}^2} = 0{,}8\cdot 10^5\text{Pa}.$$

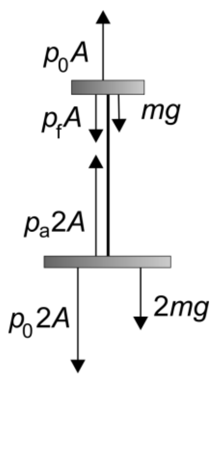
Mivel $\quad p_a l_a = p_f l_f$

(itt $l_a = l_o$)

$$l_f = l_0 \frac{p_0}{p_f} = 40\text{ cm}\ \frac{1{,}2}{0{,}8} = \mathbf{60\ cm.}$$

c) A nagyobb tartálybeli gáz melegítése közben $\frac{pV}{T}$ állandó, azaz $\frac{pl}{T}$ is. Tehát a dugattyú emelkedését x-szel jelölve: $\quad \frac{p_a l_a}{300} = \frac{p_a'(l_0 + x)}{450}$.

A nyomás szerepet játszik a „kettős” dugattyú egyensúlyában. A mellékelt ábra a rá ható erőket mutatja.



Tehát az egyensúlyra: $\quad p_0 A + p_f A + 3mg = p_a 2A,$

azaz $\quad p_0 + p_f' + \frac{3mg}{A} = 2p_a'$

(A ’ jelölés a melegítés végi állapotot jelzi.) Az előzőekből

$$p_a' = \frac{1{,}5 p_a l_a}{(l_a + x)} = \frac{1{,}5\cdot 1{,}2\cdot 10^5\cdot 4}{(4+x)}$$

(Ha x mértékegysége dm, akkor a nyomásé Pa.)

A felső gáz nyomása is kell. Ebben az esetben is pl állandó. Tehát

$$p_f l_f = p_f'(l_f - x), \qquad \text{ebből} \qquad p_f' = \frac{p_f l_f}{(l_f - x)} = \frac{0{,}8\cdot 10^5\cdot 6}{(6-x)}$$

Ezekkel a nyomások közti egyenlet

$$10^5 + \frac{0{,}8\cdot 10^5\cdot 6}{(6 - \text{x})} + 0{,}6\cdot 10^5 = \frac{2\cdot 1{,}5\cdot 1{,}2\cdot 10^5\cdot 4}{(4+ \text{x})},$$

egyszerűbben:

$$1+\frac{0{,}8\cdot 6}{(6-x)}+0{,}6=\frac{2\cdot 1{,}5\cdot 1{,}2\cdot 4}{(4+x)},$$

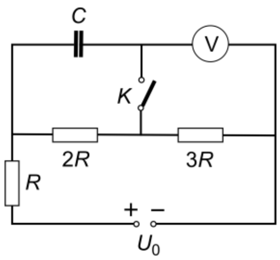
$$1{,}6+\frac{4{,}8}{(6-x)}=\frac{14{,}4}{(4+x)},$$

mindkét oldalt 1,6-del osztva, majd törttelenítve és nullára redukálva

$$1+\frac{3}{(6-x)}=\frac{9}{(4+x)}$$

$$x^2-14x+18=0$$

ennek egyik gyöke nagyobb, mint 6, a másik 1,432.
A „kettős” dugattyú tehát **felfele mozdul el 14,3cm-rel.**



4/A *Az ábra szerinti kapcsolásban* R = 25 Ω, C = 0,4 μF *és az áramforrás állandónak tekinthető kapocsfeszültsége* U_0 = 6 V.

a.) Mennyi a kondenzátor töltése, és mennyit mutat az áramkör ellenállásánál jóval nagyobb belső ellenállású feszültségmérő, ha a kapcsoló régóta nyitva van?

b.) Mekkora erősségű és milyen irányú áram folyik át a kapcsolón közvetlenül a zárása után? Mennyit mutat ekkor a feszültségmérő?

c.) Mennyit mutat a feszültségmérő, amikor a kapcsoló régóta zárt? Mennyivel változott a kondenzátor töltése a folyamat közben?

Megoldás. *a)* Ha a kapcsoló rég nyitva van, akkor a kondenzátor töltése nem változik, tehát a hozzá kapcsolt vezetékekben nem folyik áram, vagyis a feszültségmérőre nulla volt jut, ennyit is mutat. A kondenzátor feszültsége így megegyezik a 2R és a 3R ellenállásokra jutó feszültséggel. Ezek sorba vannak kapcsolva R-rel is. Az áramforrás feszültsége az ellenállások arányában oszlik meg. A kondenzátor feszültsége tehát az áramforrás feszültségének 5/6-a (5V), így töltése

$$Q=\frac{5CU_0}{6}=\mathbf{2\ \mu C}.$$

b) A kondenzátor töltése bekapcsolás közben nem változik, így feszültsége 5V marad, ezzel a 2R ellenállásra is 5V jut. A műszeren nem folyik áram, tehát az áramforrás 6V–5V =1V feszültsége az R és 3R ellenállásokon oszlik meg, azok arányában. Tehát R-re 0,25V jut, 3R-re **0,75V**, s a műszer ennyit is mutat.

A 2R ellenálláson jobbra $I_2=\dfrac{5\text{V}}{50\ \Omega}$ = 0,1A folyik, a 3R ellenálláson $I_3=\dfrac{0{,}75\text{V}}{75\Omega}$ = 0,01 A folyik jobbra, vagyis a kapcsolón **felfele** I_2-I_3 = **0,09 A** folyik.

c) Ha a kapcsoló rég zárt, akkor a kondenzátor töltése változatlan. Áram nem folyik sem a kapcsolón, sem a kondenzátoron, sem a műszer vezetékeiben.

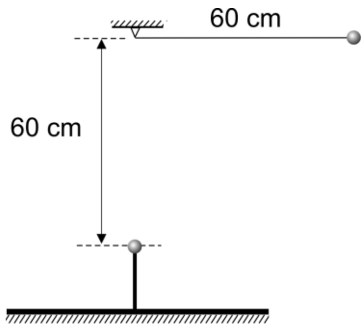
Az egyes ellenállásokra (a soros kapcsolás miatt) rendre 1V, 2V és 3V jut, s ezen utóbbit mutatja a műszer. A kondenzátor feszültsége 5V – 2V = 3V-tal csökkent, töltése pedig 3·0,4 μF = 1,2 μC-bal csökkent. Tehát a töltése ΔQ = **– 1,2 μC-val változott**.

4/B *Elektromosan szigetelő*, 60 cm *hosszú fonál egyik végét rögzítjük, másik végére* 5 gramm *tömegű,* $3\cdot10^{-7}$C *töltésű, kicsi gömböt erősítettünk. A felfüggesztési pont alatt* 60 cm-*rel egy ugyancsak* $3\cdot10^{-7}$C *töltésű kicsi gömböt rögzítünk. Az inga fonala kezdetben egyenes és vízszintes. Az ingát magára hagyjuk*

a) Mekkora szöget zár be a fonál a függőlegessel, amikor az ingatest sebessége maximális?

b) Mekkora az ingatest legnagyobb sebessége?

c) Ebben a pillanatban mekkora a fonálerő?



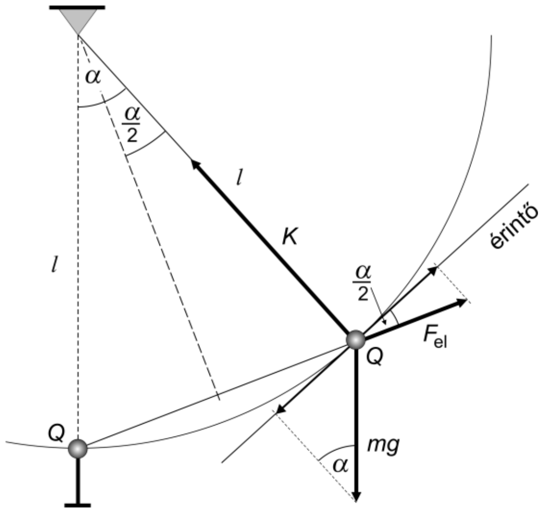
Megoldás. *a)* Az ingatest sebessége akkor a legnagyobb, amikor a test érintő irányú gyorsulása nulla

$$mg\sin\alpha = \frac{kQ^2}{\left(2l\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^3 = \frac{kQ^2}{8mgl^2} \qquad \text{Innen:}$$

$$\alpha = 2\arcsin\sqrt[3]{\frac{kQ^2}{8mgl^2}} =$$

$$= 2\arcsin\sqrt[3]{\frac{9\cdot10^9\,\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}\cdot9\cdot10^{-14}\,\mathrm{C}^2}{8\cdot5\cdot10^{-3}\cdot10\cdot0{,}36}} \approx \mathbf{20{,}5°}$$



b) Használjuk az energia-megmaradás törvényt a legnagyobb sebesség meghatározásához:

$$mgl + \frac{kQ^2}{\sqrt{2}\cdot l} = mgl\cdot(1-\cos\alpha) + \frac{kQ^2}{2\cdot l\cdot\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{2}mv^2,$$

$$v = \sqrt{2\cdot\left(gl\cos\alpha + \frac{kQ^2}{ml}\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}\right]\right)}$$

$v \approx \mathbf{3{,}18\ m/s}$

(3,46 m/s lenne, ha nem lenne elektromos kölcsönhatás.)

c) Alkalmazzuk sugár irányba a dinamika alapegyenletét:

$$\sum F = ma_{cp}.$$

$$K - mg\cos\alpha - F_{\mathrm{el}}\cdot\sin\frac{\alpha}{2} = m\frac{v^2}{l},$$

$$K = m\left(g\cos\alpha + \frac{v^2}{l}\right) + \frac{kQ^2}{4l^2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}} \approx \mathbf{0{,}134\ N}.$$