Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2000/2001 10. évfolyam 2. kategória 2. forduló

A verseny szervezője: Országos Közoktatási Szolgáltató Intézmény Pedagógiai Központ

1. feladat

Tekintsük az $f(x) = x^2 - \frac{a^2 - 1}{a}x - 1$ ($a \neq 0$) függvényt, ahol $x \in$ **R**. A függvény grafikonja az *y* tengelyt egy, az *x* tengelyt két pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy a három metszéspont által meghatározott háromszög területe nagyobb vagy egyenlõ, mint 1.

2. feladat

Legyen *X* egy adott *AB* szakasz belsõ pontja. Vegyük fel a szakasz ugyanazon oldalára az *APX* és *XQB* szabályos háromszögeket! Legyen *M* és *N* az *AQ*, illetve *BP* szakasz felezõpontja!

Bizonyítsuk be, hogy *XMN* háromszög szabályos, továbbá határozzuk meg azt az *X* pontot, amelyre az *MN* szakasz hossza minimális!

3. feladat

Jelölje $s(n)$ az n szám 10-es számrendszerbeli alakjában a számjegyek szorzatát. Mennyi

$$s(2000)+s(2001)+s(2002)+...+s(3000)?$$

4. feladat

Egy asztalon 2000 darab pénzérme van, mindegyik a „fej" oldalával felfelé fordítva.

Egy-egy alkalommal pontosan *k* darab érmét a másik oldalára fordíthatunk.

Bizonyítsuk be, hogy az adott mûvelet ismétlésével elérhetõ bármely adott *k* szám esetén ($1 \leq k \leq 2000$), hogy a 2000 érme „írás" oldalával felfelé legyen fordítva!