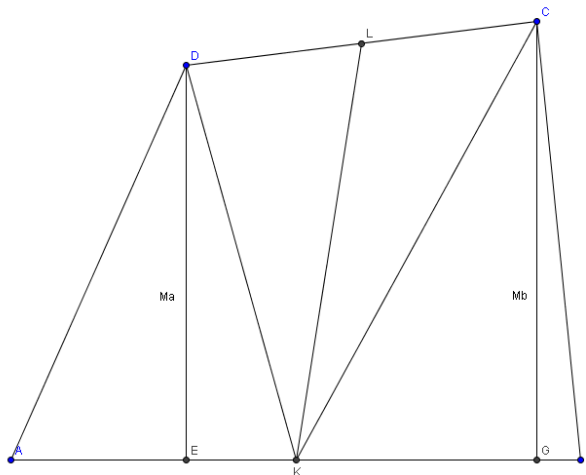


1. Mi a szükséges és elégséges feltétele, hogy egy konvex ABCD négyszög AB és CD oldalának felezőpontjai által meghatározott szakasz felezze a négyszög területét!

Mo: a, Felezi. Ekkor  $DKL \Delta$  területe egyenlő  $KCL \Delta$  területével, így  $AKD \Delta$  területe egyenlő  $KBC \Delta$  területével, ebből  $Ma=Mb$  adódik, így AB párhuzamos DC-vel.  
 b, AB párhuzamos DC-vel. Így AKLD és KBCL trapézok területe egyenlő, hiszen alapjaik és magasságaik egyenlőek. Tehát a szükséges és elégséges feltétel az, hogy AB párhuzamos legyen DC-vel.



2. Mely  $x, y$  és  $z$  számra teljesül az alábbi egyenlőség?  $4x^3 + 2y^3 + z^3 = 2002xyz$

Mo: Ha  $x, y, z$  egész szám, akkor  $z$  páros, így felírható  $z = 2z_1$  alakban, így  $2x^3 + y^3 + 4z_1^3 = 2002xyz_1$  egyenletet kapunk, aminél  $y$  páros, így felírható  $y = 2y_1$  alakban, majd  $x$  lesz páros, aminél  $x = 2x_1$  alkalmazásával  $4x_1^3 + 2y_1^3 + z_1^3 = 2002x_1y_1z_1$  egyenletet kapjuk. Ezt folytatva mindig kisebb abszolút értékű megoldásokat kapnánk, ha csak  $x=y=z=0$  fenn nem áll, de ez megoldás lesz.

3. Mutassa meg, hogy egy kocka csúcsainak halmazából kiválasztható néhány 4-elemű részhalmaz úgy, hogy a kocka bármely csúcsát a kiválasztott 4-elemű részhalmazok közül pontosan egy tartalmazza!

Mo: 3 pont esetén pontosan 3 eset fordul elő: 1 lapon vannak; 1 átlós sík mentén; 1 tetraéder csúcsai mind. A kiválasztott 4 elemű halmazok legyenek: 6db lap csúcsai; 6db átlós sík csúcsai; 2db tetraéder csúcsai. Így bármely 3 csúcsot tartalmazza a 14db halmaz egyike. A 14 halmaz közül bármely kettőnek legfeljebb 2 azonos csúcsa van, tehát tetszőleges 3 kiválasztott csúcs mindegyikét legfeljebb 1 db tartalmazhatja.