**1. feladat (AD_HALADOK_2002_3ford_llkat_1fel)**
Határozzuk meg azokat az $x_1$, $x_2$,.... $x_n$ pozitív számokat, amelyekre teljesülnek az

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = 3,$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + 1\frac{1}{x_n} = 3$$

összefüggések.

**1. megoldás (AD_HALADOK_2002_3ford_llkat_1fel_1mego)**
Az $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ pozitív számokat keressük.
I.

$$x1+x2+...+xn=3,$$

II.

$$\frac{1}{x1} + \frac{1}{x2} + ... + 1\frac{1}{xn} = 3,$$

Tekintsük a két egyenlet összegét:

$$x1+\frac{1}{x1}+x2+\frac{1}{x2}+...+xn+\frac{1}{xn}=6$$

Ez n darab számnak és reciprokának az összege, és mivel tudjuk, hogy egy pozitív számnak és reciprokának összege legalább 2, ezért n maximum 3 lehet.
Vizsgáljuk az
n = 1 esetet:
$x_1 = 3$

$1/x_1 = 3$
Nem lehetséges.

n = 2:
$x_1+x_2 = 3$
$x_1 = 3 - x_2$

$$\frac{1}{x1}+\frac{1}{x2}=3$$

$$\frac{1}{3-x2}+\frac{1}{x2}=3$$

$$3 = 9x2-3x_2^2$$

$$x_2^2 - 3x_2 + 1 = 0$$

$$x_{21} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Ez nagyobb, mint 3, ezért $x_1 < 0$, ami nem megoldás, mivel mi pozitív számokat keresünk.

$$x_{22} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{2}{3-\sqrt{5}}$$

n = 3:

$$x_1 + \frac{1}{x_1} + x_2 + \frac{1}{x_2} + x_3 + \frac{1}{x_3} = 6$$

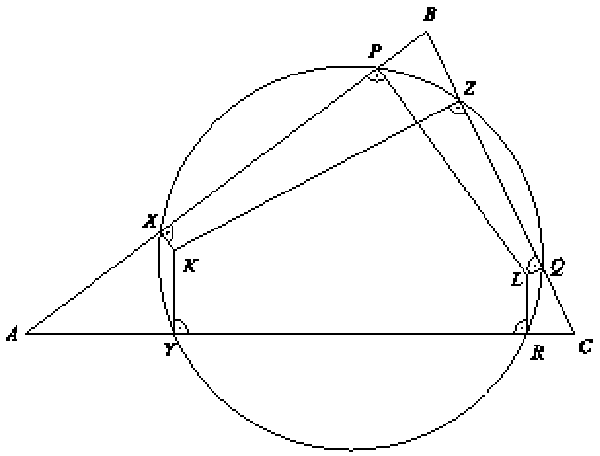
Ekkor mind a három számnak és reciprokának összege 2, tehát mind a három szám 1.
Tehát a megoldás:
n = 3, $x_1=x_2=x_3=1$ vagy

$$n=2,\ x_1 = \frac{2}{3-\sqrt{5}},\ x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

**1. feladat (AD_HALADOK_2002_3ford_IIkat_2fel)**

Az *ABC* háromszög tetszöleges belsö pontjából merölegeseket állítunk az oldalakra. A kapott három talppont által meghatározott háromszög köréírt köre az eredeti háromszög oldalait három pontban metszi: az *AB* oldalt P-ben, a *BC* oldalt Q-ban , az *AC* oldalt R-ben.
Bizonyítsuk be, hogy a P-n átmenö *AB*-re meröleges egyenes, a Q-n átmenö *BC*-re meröleges egyenes és az R ponton átmenö *AC*-ra meröleges egyenes közös pontban metszik egymást.

**1. megoldás (AD_HALADOK_2002_3ford_IIkat_2fel_1mego)**




Legyenek X, Y, Z a háromszög belsejében adott K pontból az oldalakra állított merölegesek talppontjai. Az *XK* egyenes a *PX* húr felezömerölegesére tükrözve a *PL* egyenesbe megy át, így *PL* egyenes tekinthető a *KX* egyenes *XYZ* háromszög köréírt körének középpontjára való tükörképének. Hasonlóképpen *KY RL*-be, *KZ QL*-be. Mivel a kör középpontra való tükrözés elött *KX*, *KY* és *KZ* egyenesek egy ponton mentek át, ezért a tükrözés után tükörképeik is egy ponton fognak átmenni, erre az állítást beláttuk.

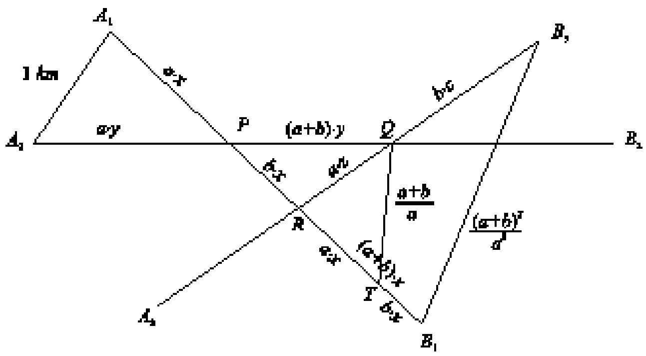
## 1. feladat (AD_HALADOK_2002_3ford_IIkat_3fel)

Egy síkbeli terepen hat város között 6 út vezet. Az elsö $A_1$-böl $B_1$ -be, a második $A_2$-böl $B_2$ -be, a harmadik pedig $A_3$-böl $B_3$ -ba. $A_i$-böl ( i = 1, 2, 3) egyszerre indul el $f_i$ futár ( i = 1, 2, 3) a $B_i$ városba ( i = 1, 2, 3), ahol mindegyik futár állandó sebességgel halad.

A közös indulás után a óra elteltével $f_1$ és $f_2$ találkozik, majd ezután b óra elteltével $f_1$ és $f_3$ találkozik, majd ismét a óra elteltével $f_2$ és $f_3$ mennek el egymás mellet, végül újabb b óra múlva mindhárman egyszerre érnek célba.

Milyen messze lehet $B_1$ $B_3$-tól, ha a > 0, b > 0 és $A_1A_2$ = 1km?

## 1. megoldás (AD_HALADOK_2002_3ford_IIkat_3fel_1mego)




Legyen $f_1$ futár sebessége x, $f_2$-é y, és $f_3$-é z. $f_1$ és $f_2$ találkozzon a P pontban, $f_1$ és $f_3$ az R pontban, $f_2$ és $f_3$ a Q pontban. Így az $A_1P$ szakasz hossza a·x, a *PR* szakasz hossza b·x, a $RB_1$ szakasz hossza (a+b)·x , az $A_2P$ szakasz hossza a·y, a *PQ* szakasz hossza (a+b)·y, a $QB_3$ szakasz hossza b·z, a *QR* szakasz hossza a·z. Legyen T a $QB_1$ szakasz a:b arányú osztópontja. Mivel az $A_1PA_2$ és a *QPT* szög egyenlö nagyságú, és a közrefogó oldalak aránya megegyezik, ezért az $A_1PA_2$ és a *QPT* háromszög hasonló, a hasonlóság aránya a:(a+b). Ennek alapján az *RT* szakasz hossza

$\frac{a+b}{a}$. A *QRT* és a $B_3RB_1$ háromszögben a $B_3RB_1$ és a *QRT* szög és a közrefogó oldalak aránya megegyezik, ezért ez a két háromszög is hasonló. A hasonlóság aránya a:(a+b), ezért a $B_1B_3$ szakasz hossza

$$\left(\frac{a+b}{a}\right)^2.$$