M

Arany Dániel Matematika Verseny 2002-2003.
Haladók, első forduló
III. kategória feladatainak megoldása

1. feladat:

Határozzuk meg azokat a p, q, r és n számokat, amelyekre $p^n + q^2 = r^2$ teljesül, ahol p, q, r pozitív prímszám, n pedig pozitív egész szám.

Megoldás:

Az egyenlet alapján mindhárom prím egyszerre nem páratlan (és páros sem).
Mivel $r = 2$ nem megoldás, ezért csak $p = 2$, $r > 2$, $q > 2$ vagy $q = 2$, $p > 2$, $r > 2$ lehetséges. 1 pont

Ha $p = 2$, akkor $2^n = (r-q)(r+q)$ alapján egyrészt $n > 1$, másrészt $r - q = 2^s$ és $r + q = 2^t$, ahol az s és t pozitív egész számokra igaz, hogy $1 \le s < t$, továbbá $s + t = n$.

Az $r - q = 2^s$, $r + q = 2^t$ egyenletrendszerből $q = 2^{t-1} - 2^{s-1}$ és $r = 2^{t-1} + 2^{s-1} = 2^{s-1} \cdot \left(2^{t-s} + 1\right)$.

Mivel r páratlan prím, ezért csak $s = 1$ lehetséges. 1 pont

Ha pedig $s = 1$, akkor $t = n - 1$, így $r = 2^{n-2} + 1$ és $q = 2^{n-2} - 1$.

Az $n = 2$ és $n = 3$ esetek nem adnak megoldást.

Ha viszont $n > 3$, akkor $q = 2^{n-2} - 1$ és az $r = 2^{n-2} + 1$ szám egyike biztosan osztható 3-mal.

Amennyiben n páros szám, akkor $\left(2^{n-2} - 1\right)$ osztható 3-mal, ha pedig n páratlan, akkor $r = 2^{n-2} + 1$. 1 pont

Az r szám értéke nem lehet 3, így csak $q = 2^{n-2} - 1 = 3$ lehetséges. Az összefüggésből $n = 4$ következik, ahonnan $q = 3$, $r = 5$ adódik. Így ekkor a megoldás $p = 2$, $q = 3$, $r = 5$ és $n = 4$. 1 pont

Ha $q = 2$, akkor $p^n = (r-2)(r+2)$, ahol $r - 2$ és $r + 2$ relatív prímek, ezért csak $r - 2 = 1$, $r + 2 = p^n$ lehetséges, hiszen $r - 2 < r + 2$. 1 pont

Ekkor pedig $r = 3$, ahonnan $p^n = 5$, így $p = 5$, $n = 1$ 1 pont

Összefoglalva a megoldásokat:

p	q	r	n
2	3	5	4
5	2	3	1

1 pont

Összesen: 7 pont

2. feladat:

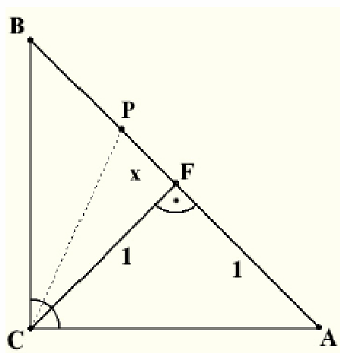
Az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszög AB átfogója 2 egység hosszú. Az átfogó mely P pontjára igaz, hogy a

a) $3PA + 6PB + 5PC$ összeg értéke minimális?

b) $3PA + 6PB + 5PC$ összeg értéke maximális?

Megoldás:

Tekintsük a következő ábrát:



Az ábra szerint az AB átfogó felezőpontja F, ezért $AF = BF = CF = 1$. Legyen a P pontnak az F felezőponttól való távolsága előjelesen x, ahol $-1 \le x \le 1$.

Pitagorasz tétele alapján $CP = \sqrt{1+x^2}$ a PCF derékszögű háromszögből.

Az előzőek alapján

$$3PA + 6PB + 5PC = 3(x+1) + 6(1-x) + 5\sqrt{1+x^2} = 3(3-x) + 5\sqrt{1+x^2}.$$

A kapott kifejezés lehetséges értékeit c-vel jelölve a $3(3-x) + 5\sqrt{1+x^2} = c$ egyenletet kapjuk, ahol $c > 11$, hiszen $c > 3(3-1) + 5\sqrt{1+0} = 11$.

Az egyenlet $5\sqrt{1+x^2} = (c-9) + 3x$ alakjából négyzetre emeléssel $25 + 25x^2 = (c-9)^2 + 9x^2 + 6(c-9)x$, azaz $16x^2 - 6(c-9)x + 25 - (c-9)^2 = 0$ adódik. (*)

Az egyenletről tudjuk, hogy van x-re megoldása. 1 pont

Megoldás pedig akkor van, ha a kapott másodfokú egyenlet diszkriminánsa nemnegatív.

Tehát $D = 36(c-9)^2 + 64(c-9)^2 - 1600 \ge 0$,

így $(c-9)^2 - 16 \ge 0$, azaz $(c-13)(c-5) \ge 0$. 1 pont

Mivel $c - 5 > 0$, hiszen $c > 11$, ezért $D \ge 0$ a $c \ge 13$ esetben teljesülhet csak.

Ezért a $3PA + 6PB + 5PC$ összeg minimuma 13. 1 pont

Ez akkor valósul meg, ha $3(3-x)+5\sqrt{1+x^2}=13$ a $D=0$ esetben, így (*) alapján $x=\frac{6\cdot 4}{32}=\frac{3}{4}$.

Ekkor a P pont az AB átfogó B-hez közelebbi nyolcadolópontja, azaz $PB=\frac{1}{4}$, $AP=\frac{7}{4}$. 1 pont

Most megmutatjuk, hogy maximuma $P=A$ esetben van. Így azt fogjuk igazolni, hogy $3(3-x)+5\sqrt{1+x^2}\le 3(3+1)+5\sqrt{1+(-1)^2}=12+5\sqrt{2}$, azaz $x=-1$ esetén lesz a bal oldal maximális. 1 pont

Az egyenlőtlenség rendezéssel

$$5\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2}\right)\le 3(x+1) \text{ alakú.}$$

Az $-1\le x\le 1$ feltétel miatt a bal oldal értéke nem nagyobb 0-nál, a jobb oldal pedig legalább 0 értékű. 1 pont

Egyenlőség pedig csak az $x=-1$ esetben állhat fenn, így a kiindulási egyenlőtlenség valóban helyes. Ennek megfelelően pedig a $3PA+6PB+5PC$ összeg maximuma $P=A$ esetén valósul meg. 1 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés:

A $3PA+6PB+5PC$ összeg minimuma13, maximuma pedig $12+5\sqrt{2}$.

3. feladat:

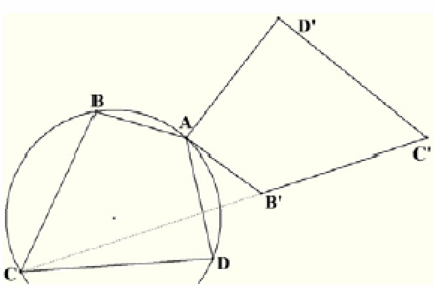
Az $ABCD$ húrnégyszögben $AB<AD$.

Forgassuk el a húrnégyszöget az A csúcs körül úgy, hogy a kapott $AB'C'D'$ négyszög $B'C'$ oldalegyenesére illeszkedjen az eredeti négyszög C csúcsa.

Bizonyítsuk be, hogy ekkor a $B'D'$ átló egyenese átmegy a D csúcson!

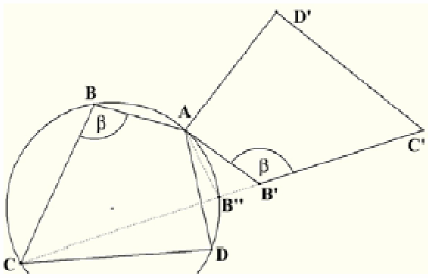
Megoldás:

Tekintsük a következő ábrát:



Először megmutatjuk, hogy a forgatás szöge egyértelmű. Ez azért igaz, mert a BC és $B'C'$ egyenes is ugyanolyan messze van az A ponttól (a forgatás miatt), és a feladat feltételei szerint mindkét egyenes átmegy a C ponton. Ilyen egyenes a BC egyenesen kívül viszont csak egy van, az A középpontú, BC egyenest érintő körhöz a C pontból húzott másik érintő. 1 pont

Most megmutatjuk, hogy B' az $ABCD$ négyszög körülírt körére esik. Legyen ugyanis B'' az $ABCD$ húrnégyszög köré írt kör és a $B'C'$ egyenes metszéspontja (ilyen metszéspont mindig van a feladat feltételei miatt). Az elrendezést az alábbi ábra szemlélteti:

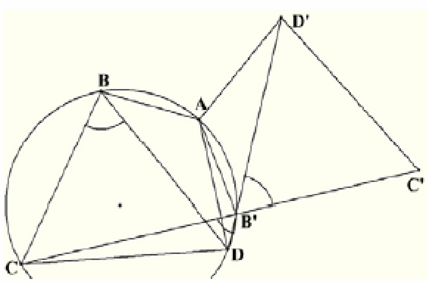


Ha B'' nem azonos B'-vel – az ábrának megfelelően – akkor egyrészt az $ABCB''$ négyszög húrnégyszög volta miatt $AB''C\angle = 180° - \beta$, így $AB''B'\angle = \beta$, másrészt a forgatás miatt $AB'C'\angle = \beta$. 1 pont

Így az $AB''B'$ háromszögben a B'' csúcsnál lévő szög β és a B' csúcsnál fekvő külső szög is β.

Ez viszont lehetetlen, mert a háromszög egyik szöge nem lehet egyenlő a nem mellette fekvő külső szöggel. Ezért szükségképpen teljesül, hogy $B'' = B'$. 2 pont

Bizonyításunknak megfelelően így a következő ábrát rajzolhatjuk meg:



Az $ABCDB'$ ötszög húrötszög, ezért a B és B' csúcsból ugyanakkora szögben látszik a CD körív.

Tehát $CB'D\angle = CBD\angle$.

A feltételek szerint B' az AD ív belső pontja, a forgatás miatt pedig $C'B'D'\angle = CBD\angle$, ami azt jelenti, hogy $CB'D\angle = C'B'D'\angle$. 2 pont

Ezek alapján pedig a $CB'D\angle$ és a $C'B'D'\angle$ szög váltószögek (C, B' és C' egy egyenesre illeszkednek), ebből pedig következik, hogy a $B'D'$ átló egyenesén valóban rajta van a D csúcs. 1 pont

Ezzel pedig a feladat állítását igazoltuk.

Összesen: 7 pont

<u>4. feladat:</u>

Egy táblára felírtuk a pozitív egész számokat növekvő sorrendben 1-től $3n$-ig. Jancsi a számok közül ezután n darabot letöröl (saját belátása szerint). Majd Juliska jön, és a megmaradt számok közül aláhúz n darabot. Bizonyítsuk be, hogy Juliska mindig el tudja érni azt, hogy az aláhúzott számok balról jobbra olvasva olyan sorozatot adjanak, amely páratlan számmal kezdődik és felváltva páros ill. páratlan elemei vannak.

Megoldás:

Nézzük a Jancsi által letörölt számokat! Ezek blokkokat alkotnak, ahol egy blokk csupa szomszédos számból áll (a blokkok egytagúak is lehetnek).

Töröljünk le a tábláról esetlegesen még néhány számot, méghozzá minden páratlan hosszú blokkot követő számot!

A táblán maradó számok között így minden hézag páros hosszúságú lesz, ezért a megmaradt szomszédos számok(az egymást követőek) különböző paritásúak. 3 pont

Ha viszont Jancsi n darab számot törölt le, akkor azok maximum n darab blokkot alkothattak, így mi is legfeljebb n darab számot törölhetünk le, ezért n darab (vagy több) még mindig a táblán marad. 1pont

Az első megmaradó szám csak páratlan lehet, hiszen az első hézag is páros hosszú. 2 pont

Így ha Juliska aláhúzza a táblán maradt első n darab számot, akkor a kívánt tulajdonságú sorozathoz jut. 1 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés:

- Bizonyítás nélküli jó módszer megadásáért legfeljebb 3 pont adható.
- Ha a versenyző nem indokolja, hogy miért lesz az első szám páratlan, de egyébként jó a megoldása, akkor feladata 5 pontot ér.