Kiss Árpád Országos Közoktatási Szolgáltató Intézmény Pedagógiai Központ

Bolyai János Matematikai Társulat

M

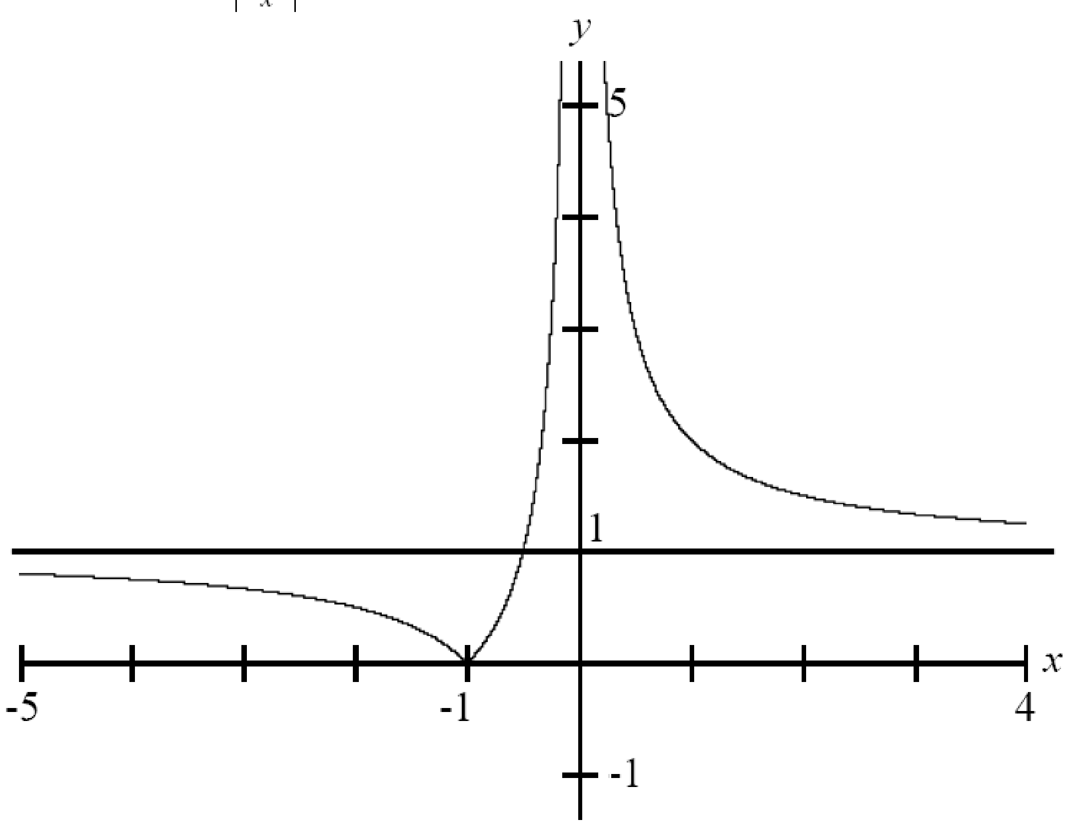
Arany Dániel Matematika Verseny 2002-2003.
Kezdők, első forduló
I-II-III. kategória feladatainak megoldása

1. Oldja meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:

$$\left|\frac{x+1}{x}\right| > p,$$

ahol p valós paramétert jelent! (6 pont)

Megoldás: Az $x \mapsto \left|\frac{x+1}{x}\right| \quad x \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$ függvény grafikonja a következő:



(2 pont)

Ha $p > 0$ és $p \neq 1$, akkor az $\left|\frac{x+1}{x}\right| = p$ egyenlet gyökei : $\frac{1}{p-1}$ és $-\frac{1}{p+1}$. (1 pont)

Így az egyenlőtlenség megoldáshalmaza:

ha $p < 0$, akkor $\boldsymbol{R} \setminus \{0\}$; ha $p = 0$, akkor $\boldsymbol{R} \setminus \{-1; 0\}$;

ha $0 < p < 1$, akkor $\left]-\infty; \frac{1}{p-1}\right[\cup \left]-\frac{1}{p+1}; 0\right[\cup \left]0; +\infty\right[$;

ha $p = 1$, akkor $\left]-\frac{1}{2}; 0\right[\cup \left]0; +\infty\right[$;

ha $p > 1$, akkor $\left]-\frac{1}{p+1}; 0\right[\cup \left]0; \frac{1}{p-1}\right[$.

(3 pont)

2. Határozza meg azokat a pozitív p prímszámokat, amelyekre $p^2 + 12p + 2$ is prímszám!

(6 pont)

Megoldás: Minden 3-mal nem osztható egész szám négyzete 3-mal osztva egyet ad maradékul.

Ezért $p \neq 3$ esetén $p^2 + 2$ osztható hárommal. (4 pont)

Így $p \neq 3$ esetén $p^2 + 12p + 2$ hárommal osztható pozitív prímszám, vagyis 3, ami nem lehetséges. (1 pont)

Ha $p = 3$, akkor $p^2 + 12p + 2 = 47$, ami prímszám, tehát $p = 3$. (1 pont)

3. Igazolja, hogy ha egy téglatest összes élének mérőszámát összeadjuk és ezt az összeget a felszínének mérőszámával megszorozzuk, akkor a térfogata mérőszámának negyvenszeresénél nagyobb értéket kapunk! (8 pont)

Megoldás: Legyenek a téglatest egy csúcsából kiinduló éleinek mérőszámai a, b, c. Azt kell megmutatni, hogy

$$(4a + 4b + 4c)(2ab + 2ac + 2bc) > 40abc.$$ (1 pont)

A továbbiakban felhasználjuk, hogy a, b és c pozitív számok és ekvivalens átalakításokat végzünk.

$$\frac{(a+b+c)(ab+ac+bc)}{abc} > 5,$$ (1 pont)

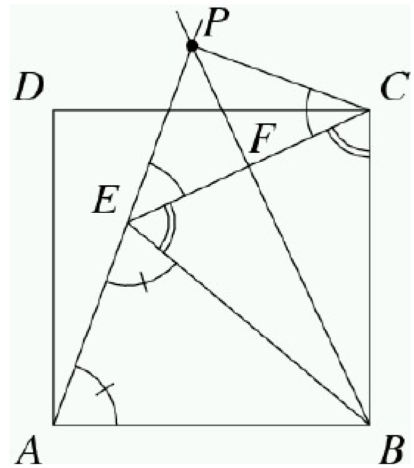
$$\frac{a^2b + ab^2 + abc + a^2c + abc + ac^2 + abc + b^2c + bc^2}{abc} > 5$$ (1 pont)

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} + 1 + \frac{a}{b} + 1 + \frac{c}{b} + 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} > 5,$$ (1 pont)

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) > 2.$$ (1 pont)

Mivel egy pozitív szám és a reciproka közül az egyik legalább 1, a bal oldal legalább 3, s így a feladat állítását igazoltuk. (3 pont)

4. Kössük össze az $ABCD$ négyzet A csúcsát a négyzet belsejében fekvő E ponttal, amelyre $AB = BE$. Jelölje a CE szakasz felezőmerőlegesének és az AE egyenesnek a metszéspontját P. Igazolja, hogy P illeszkedik a négyzet körülírt körére! (10 pont)



Megoldás: A feltétel szerint az ABE és a BCE háromszögek egyenlő szárúak, így $BAE\angle = BEA\angle$ és $BEC\angle = BCE\angle$. Mivel a PB egyenes az EC szakasz felezőmerőlegese, az ECP háromszög is egyenlő szárú és $PEC\angle = PCE\angle$.

Jelöljük a $BAE\angle$-et α -val. Felhasználva, hogy a háromszög szögösszege 180°, $EBC\angle = 2\alpha - 90^\circ$ és $BEC\angle = 135^\circ - \alpha$. (4 pont)

$AEC\angle = AEB\angle + BEC\angle = 135^\circ$. (1 pont)

Ezért $PEC\angle$ $(= PCE\angle) = 45^\circ$. (1 pont)

Az ECP háromszög tehát egyenlő szárú, derékszö-gű és a derékszöge a P csúcsnál van. A Thalész-tétel megfordítása szerint P rajta van AC Thalész-körén, azaz a négyzet körülírt körén, így állításunkat igazoltuk. (4 pont)

Megjegyzés:

A feladat a kerületi és középponti szögek közötti összefüggés alapján is bizonyítható. Legyen a kör középpontja B, sugara pedig a négyzet oldalával egyenlő. E a feltételek szerint rajta van ezen a körön, így $AEC\angle$ kerületi szög, melynek értéke 135°, mert a hozzá tartozó középponti szög $ABC\angle = 270^\circ$. Innentől a bizonyítás az előzőeknek megfelelően folytatható.

5. Igazolja a következő egyenlőtlenséget (ahol a nevező mindig 10-zel nő)!

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{13} + \frac{1}{23} + \ldots + \frac{1}{2003} > \frac{2}{3} \qquad \text{(10 pont)}$$

Megoldás: Nyilvánvalóak a következő egyenlőtlenségek:

$$\frac{1}{23} + \frac{1}{33} + \ldots + \frac{1}{93} > 8 \cdot \frac{1}{100},$$
$$\frac{1}{103} + \frac{1}{113} + \ldots + \frac{1}{193} > 10 \cdot \frac{1}{200},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{1}{1903} + \frac{1}{1913} + \ldots + \frac{1}{1993} > 10 \cdot \frac{1}{2000}.$$

Így a bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldalát K-val jelölve, azt kapjuk, hogy:

$$K > \frac{1}{3} + \frac{1}{13} + \frac{8}{100} + \frac{1}{10}\left[\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{16}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{18} + \frac{1}{19} + \frac{1}{20}\right)\right] > \frac{1}{3} + \frac{3}{50} + \frac{2}{25} + \frac{1}{10}\left(\frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + 8 \cdot \frac{1}{16} + 4 \cdot \frac{1}{20}\right) =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{9}{25} > \frac{1}{3} + \frac{9}{27} = \frac{2}{3}.$$

<u>Pontozás:</u> A teljes megoldásért 10 pont jár.