

**Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny**  
**2003/2004 10. évfolyam 2. kategória 1. forduló**

A verseny szervezője: Országos Közoktatási Szolgáltató Intézmény Pedagógiai Központ

**1. feladat**

Bizonyítsuk be, hogy

a)  $2003^{2004} + 2004^{2003}$  nem prímszám,

b)  $2003^{2004} - 2004^{2003}$  nem négyzetszám.

**2. feladat**

Egy egyenlő szárú háromszög alapjának egyik csúcsán átmenő egyenes felezi a háromszög területét és a háromszög alaphoz tartozó magasságát is. Milyen arányban osztja a háromszög alaphoz tartozó magassága a területet felező egyenes háromszögbe eső szakaszát?

**3. feladat**

Bizonyítsuk be, hogy ha az  $x^2 + px + q = 0$  egyenletnek két olyan valós gyöke van, amelyek közül az egyik a  $[0; 1]$  intervallum belsejébe esik, a másik pedig az intervallumon kívül van (ahol  $p$  és  $q$  valós paraméter), akkor az

$$(1+p+q)x^2 + (1+2p+3q)x + 2q = 0$$

egyenletnek pontosan egy pozitív gyöke van.

**4. feladat**

Legyen  $a, b, c$  és  $d$  négy pozitív egész szám. Bizonyítsuk be, hogy

$$[(a;c);(b;d)] \leq ([a;b];[c;d]),$$

ahol  $(x;y)$  - a szokásos módon - az  $x$  és  $y$  egészek legnagyobb közös osztóját,  $[x;y]$  pedig a legkisebb közös többszörösét jelöli.

**5. feladat**

Egy osztályba 20 diák jár. Tudjuk, hogy bármely két diáknak van közös nagyapja. (Minden diáknak két nagyapja van.) Bizonyítsuk be, hogy van köztük 14 olyan tanuló, akiknek közös nagyapja van!