

# Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

## 2003/2004 10. évfolyam 3. kategória 2. forduló

A verseny szervezője: Országos Közoktatási Szolgálató Intézmény Pedagógiai Központ

### 1. feladat

Bizonyítsuk be, hogy ha  $x$  és  $y$  egész számokra teljesülnek a

$$(1) \quad 13 \mid x^2 - 2xy + y^2 - 5x + 7y \quad \text{és} \quad (2) \quad 13 \mid x^2 - 2xy + 2y^2 + x - y$$

oszthatóságok, akkor teljesül a következő is:

$$(3) \quad 13 \mid xy - 12x + 15y.$$

### 2. feladat

Az  $O$  középpontú  $AB$  átmérőjű  $r$  sugarú körhöz az  $OA$  félegyenes  $A$  ponton túli meghosszabbításának tetszőleges  $C$  pontjából érintőt húzunk a körhöz. Legyen az  $A$  pontból az érintőre állított merőleges talppontja a  $P$  pont. Határozzuk meg a  $C$  pontot úgy, hogy a  $PB$  távolság a lehető legnagyobb legyen!

### 3. feladat

Egy  $8 \times 8$ -as sakktáblára 8 bástyát helyeztünk el úgy, hogy semelyik kettő nem üti egymást. Bizonyítsuk be, hogy páros sok bástya áll fekete mezőn!