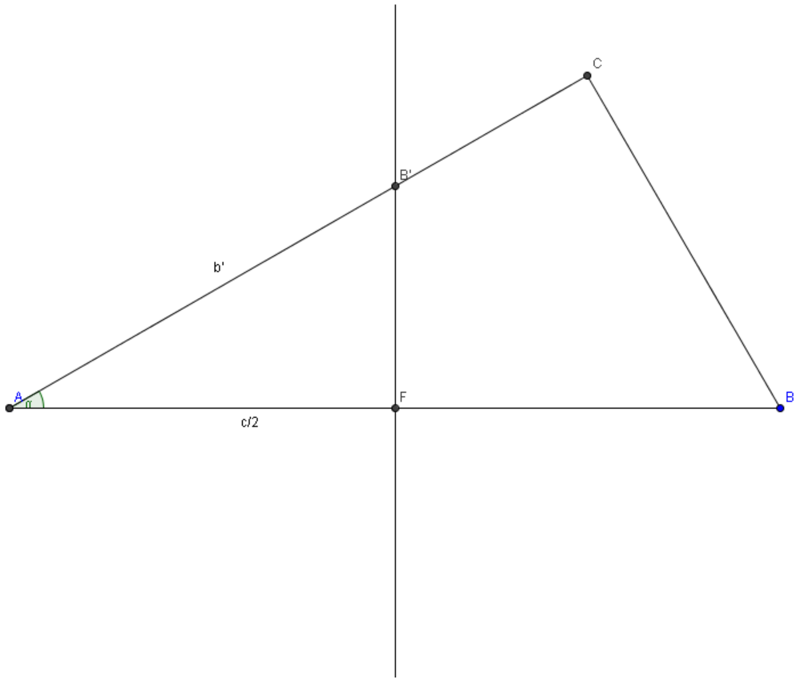
Adh2-3m 0405

1. Egy derékszögű háromszög átfogójának felezőmerőlegese a háromszög területét 1:n arányban osztja, ahol n pozitív egész szám. Mekkorák lehetnek a háromszög hegyesszögei?

Mo: Az eredeti háromszög átfogója c; hosszabb befogója b. A levágott háromszög az eredetihez hasonló, miközben a közös szög melletti befogója c/2. A b befogóból levágott b' darabra $bb' = \frac{c^2}{2}$; a területek arányából $b' = \frac{2b}{n+1}$, így $\cos^2\alpha = \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{n+1}{4}$. Mivel 0 és 1 közötti a $\cos^2\alpha$, az n=1 vagy 2 lehet, azaz $\alpha = 45° vagy 30°$.



2. Bizonyítsuk be, hogy bármely pozitív egész szám reciproka felírható 2005 darab – egymástól páronként különböző – pozitív egész szám reciprokának összegeként.

Mo: Felhasználva az $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$, illetve az $\frac{1}{n} = 1 \cdot \frac{1}{n}$ összefüggéseket, így $\frac{1}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n} + \ldots + \frac{1}{2^{2003}n} + \frac{1}{3 \cdot 2^{2002}n} + \frac{1}{3 \cdot 2^{2003}n}$ megfelelő.

3. Adott a síkon n darab pont (n>3). A pontok közül bármely három lefedhető egy egységnyi területű háromszöglappal. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az összes (mind az n darab) pont lefedhető egy 4 egység területű háromszöglappal.

Mo: Tekintsük a véges sok pont által meghatározott háromszögek közül a legnagyobb területűt. Húzzunk két-két párhuzamost mindhárom oldalegyenessel, annak mindkét félsíkjában, olyan távolságra az oldalegyenestől, mint a háromszög ezen oldalához tartozó magassága. Mivel az eredeti háromszög a legnagyobb területű, ezért az összes pontnak benne kell lenni mindhárom sávban, hiszen tetszőleges pontot hozzávéve a háromszög két csúcsához, a keletkező háromszög nem nagyobb területű az eredetinél. Az így keletkező 3 sáv közös része egy nagyobb háromszög, melynek az eredeti háromszög a középvonal háromszöge. Mivel a középvonal háromszög területe legfeljebb 1, ezért a nagy háromszögé legfeljebb 4.