Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2004/2005 10. évfolyam 3. kategória 1. forduló

A verseny szervezője: Országos Közoktatási Szolgáltató Intézmény Pedagógiai Központ

1. feladat

Az a_n számtani sorozat elemei pozitív egészek. Mutassuk meg, hogy ha a sorozat elemei között van négyzetszám, akkor végtelen sok van!

2. feladat

Igazoljuk, hogy egy egységélű kocka felületén van olyan pont, melyből a felület bármely másik pontja legfeljebb 2 egység hosszú úton elérhető, ha csak a kocka felületén haladhatunk!

3. feladat

Igazoljuk, hogy ha az x, y, z valós számokra teljesül az

$$x+y+z=6 \quad \text{és az} \quad xy+yz+zx=9$$

egyenlőség, akkor az x, y, z számok mindegyike nemnegatív és nem nagyobb 4-nél.

4. feladat

Az $ABCD$ konvex négyszögben az $ABD\angle = 20^\circ$, a $DBC\angle = 60^\circ$, az $ADB\angle = 30^\circ$, és a $BDC\angle = 70^\circ$. Bizonyítsa be, hogy a négyszög területe

$$\frac{1}{2}\cdot(AB\cdot CD+AD\cdot BC)\,!$$

5. feladat

Legyen f egy olyan függvény, ami egész számpárokhoz 1-et vagy -1-et rendel a következő szabályok szerint:

$$f(0,0)=-1,$$

$$f(1,0)=1$$

és minden (k,l) egész számpárra

$$f(k,l)\,f(k+1,l)\,f(k,l+1)=1, \quad \text{valamint}$$

$$f(k,l)\,f(k-1,l)\,f(k,l-1)=1.$$

Mennyi $f(2005^2,2005)$ értéke?