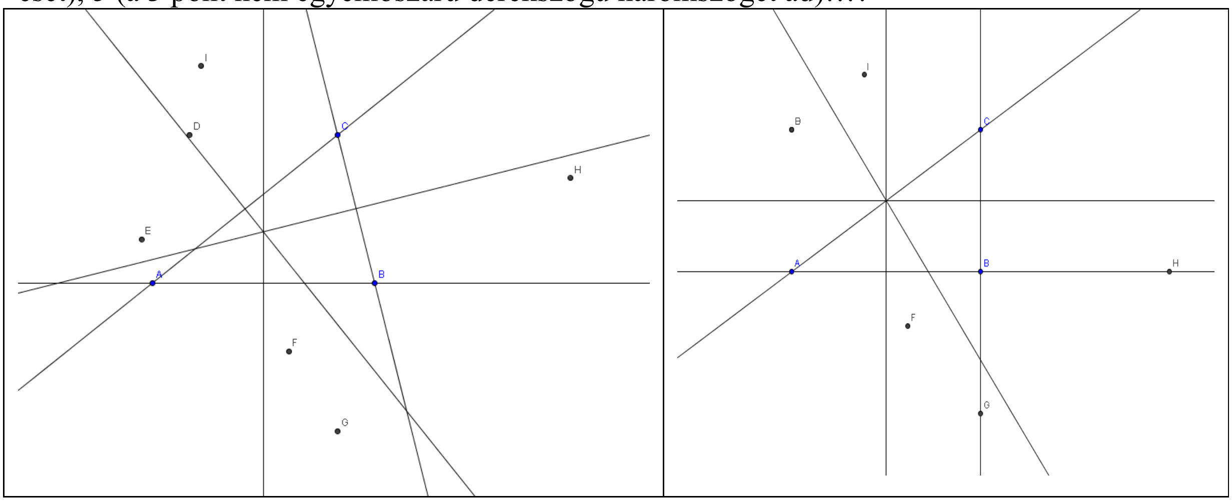
1. Adott a síkon három nem egy egyenesre eső pont úgy, hogy az általuk meghatározott háromszög nem egyenlőszárú. Hányféleképpen vehető fel ezen a síkon az adott pontoktól különböző negyedik pont úgy, hogy az így kapott négy pontból álló halmaznak legyen szimmetriatengelye?

Mo: A tengelyen levő pontok száma páros, ugyanis ha egy pont pontosan akkor nincs a tengelyen, ha tükörképe sincs. 4 pont nem lehet a tengelyen, mert a 3 pont nem volt kollineáris. Két tengelyen lévő pont esetén a másik két pont szakaszfelező merőlegese a tengely. Ebből 3 eset van aszerint, melyik két ponton megy át a tengely, a 4. pont a tengelyen kívüli pont tükörképe lesz. Ha nincs pont a tengelyen, akkor két-két pont szakaszfelező merőlegese lesz a tengely. Ez ismét 3 eset. Az eredetileg adott 3 pont helyzetétől függően azonban előfordulhat, hogy a leírtaknak megfelelően felvett 6 pont között egyesek egybeeshetnek. Az összesen felvehető pontok száma lehet 6 (általános eset), 5 (a 3 pont nem egyenlőszárú derékszögű háromszöget ad)…?



2. Az A,B, és C halmazok elemei természetes számok. Az A-ban a négyzetszámoknál 20-szal kisebb, a B-ben a 10-zel osztva 2 maradékot adó, míg C-ben a négyzetszámoknál 69-cel nagyobb számok vannak. Keresse meg azokat a számokat, amelyek az A, B, és C halmazok közül pontosan két halmaznak elemei!

Mo: $A = \{n^2 - 20\} = \{5;16;29;...\}$; $B = \{10k + 2\} = \{2;12;22;...\}$; $C = \{l^2 + 69\} = \{69;70;73;...\}$
B és C diszjunktak, mert B 5-ös maradéka 2, míg l^2 -é 0,1,-1 lehet, így C elemeié -1,0,-2 lehet. A és B is diszjunktak, mert A 5-ös maradéka 0,1,-1 lehet, míg B elemeié 2. A és C közös elemeire $n^2 - 20 = l^2 + 69$, azaz $(n + l)(n - l) = 89$,mivel 89 prím és $n > l \geq 0$, így *n=45, l=44*, azaz A és C egyetlen közös eleme a 2005.

3. Mennyi a $\sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2}+\sqrt{(x-7)^2+(y+3)^2}$ kifejezés legkisebb értéke, ha x és y valós számok és $x+2y-1=0$?

Mo: $x-3=-2(y+1)$ és $x-7=-2(y+3)$ a feltétel szerint. Így a kifejezés $\sqrt{5}(|y+1|+|y+3|)$ minimuma ábrázolás vagy abszolútérték-jelek felbontása után $2\sqrt{5}$.