Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2005/2006 10. évfolyam 3. kategória 1. forduló

A verseny szervezője: Országos Közoktatási Szolgáltató Intézmény Pedagógiai Központ

1. feladat

Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenletrendszert:

(1) $$x^2 = y^2 + z^2 + 1,$$

(2) $$x = y + z - 3.$$

2. feladat

Az *AB* szakasz *A* csúcshoz közelebbi harmadolópontja *H*. Az *AHC* és *HBD* szabályos háromszögek az *AB* egyenes azonos oldalán helyezkednek el. *AD* és *HC* metszéspontja *P*, *BC* és *HD* metszéspontja *Q*, *AD* és *BC* metszéspontja *M*. Határozzuk meg a *PQ*:*AB* arány értékét, és bizonyítsuk be, hogy az *M*, *P*, *H*, *Q* pontok egy körön vannak.

3. feladat

Legyen x tetszőleges pozitív egész szám, és jelölje $f(x)$ az x szám és x számjegyei összegének különbségét, ahol $f(x)=0$, ha az x szám egyjegyű. Oldjuk meg az $f(f(f(x)))=9$ egyenletet!

4. feladat

Bizonyítsuk be, hogy a

$$\left(\sqrt{2}-1\right)^{2006} = \sqrt{m} - \sqrt{m-1}$$

egyenlet megoldható a pozitív egész számok halmazán!

5. feladat

Adott $2n+3$ pont a síkon úgy, hogy nincs 3 egy egyenesen, és nincs 4 egy körön. Bizonyítsa be, hogy mindig létezik egy k kör, ami pontosan 3 ponton megy keresztül, és n pont van a kör belsejében és n a körön kívül!