Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási Minisztérium
Alapkezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2005/2006-os tanév
1. forduló
haladók III. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$x^2 = y^2 + z^2 + 1 \qquad (1)$$
$$x = y + z - 3 \qquad (2)$$

1. megoldás. A (2) egyenletből x-et kifejezve és az (1) egyenletbe helyettesítve a

$$2yz - 6y - 6z = -8$$

egyenlethez jutunk. 2 pont

Ezt az egyenletet átalakítva az $(y-3)(z-3) = 5$ egyenletet kapjuk. 2 pont

Ebből:

$y-3$	1	5	-1	-5
$z-3$	5	1	-5	-1
y	4	8	2	-2
z	8	4	-2	2
x	9	9	-3	-3

2 pont

Ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért az egyenletrendszer megoldásai a következő számhármasok (és csak azok):

$$(-3; 2; -2), \quad (-3; -2; 2), \quad (9; 4; 8), \quad (9; 8; 4).$$ 1 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: Ha a versenyző csak a pozitív megoldásokat keresi, vagy fogadja el jónak, maximum 4 pontot kaphat. Ugyanennyi jár a hiányosan indokolt összes megoldás közléséért is.

2. megoldás. Az első lépést ld. az 1. megoldásnál. 2 pont

2-vel való osztás után: $yz - 3y - 3z + 4 = 0$. 2 pont

Kifejezve az egyenletből y-t: $y = 3 + \dfrac{5}{z-3}$. 2 pont

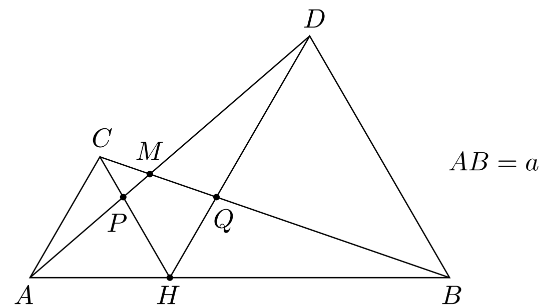
Mivel y és z is egész számok, $z - 3$ csak 5 osztója, azaz: -1, 1, -5 vagy 5 lehet.

(Innentől ld. az 1. megoldást.) 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Az AB szakasz A csúcshoz közelebbi harmadolópontja H. Az AHC és HBD szabályos háromszögek az AB egyenes azonos oldalán helyezkednek el. AD és HC metszéspontja P, BC és HD metszéspontja Q, AD és BC metszéspontja M. Határozzuk meg a $PQ : AB$ arány értékét, és bizonyítsuk be, hogy az M, P, H, Q pontok egy körön vannak.

Megoldás. Tekintsük a következő ábrát:



Az ábra szerinti HBC háromszög H pont körüli 60°-os elforgatottja a HDA háromszög. A forgatás következtében a Q pont képe P, hiszen az AD egyenes a BC egyenes képe, míg a HC egyenes a HD egyenes képe. 2 pont

Tehát $HQ = HP$, ahol a feladat feltételei alapján $QHP\sphericalangle = 60^\circ$. Mivel $HQ = HP$ és $QHP\sphericalangle = 60^\circ$, ezért a QHP háromszög szabályos. Így $PQ = HP$. 1 pont

A $CAH\sphericalangle = DHB\sphericalangle = 60^\circ$, mert a feltételek szerint a CAH és a DHB háromszög szabályos, ezért az APC háromszög és a DPH háromszög hasonló ($APC\sphericalangle$ és $DPH\sphericalangle$ csúcsszögek), a hasonlósági arány pedig $AC : DH = AH : HB = 1 : 2$. 1 pont

A hasonlóság alapján $HP : PC = HD : AC = \dfrac{2}{3}a : \dfrac{1}{3}a = 2$.

Tehát $HP = PQ = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{3}a = \dfrac{2}{9}a$, így

$$PQ : AB = \frac{2}{9}a : a = \frac{2}{9}.$$ 1 pont

A BMD háromszög BMD szöge 60° a forgatás miatt, ezért a PMQ szög értéke 120°. 1 pont

Az $MPHQ$ négyszögben $QHP\sphericalangle = 60^\circ$ és $PMQ\sphericalangle = 120^\circ$, így az $MPHQ$ négyszög húrnégyszög, tehát a négy pont egy körön van. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. Legyen x tetszőleges pozitív egész szám, és jelölje $f(x)$ az x szám és x számjegyei összegének különbségét, ahol $f(x)=0$, ha az x szám egyjegyű. Oldjuk meg az $f\big(f\big(f(x)\big)\big)=9$ egyenletet!

Megoldás. $f(x)$ osztható 9-cel, hiszen egy szám és a számjegyei összegének 9-es maradéka ugyanaz. 1 pont

Az $f\big(f(x)\big)=y$ jelöléssel először az $f(y)=9$ egyenletet kell megoldani.

Az y szám nem lehet háromjegyű (vagy annál többjegyű), mert $100-(9+9+9)>9$. Az y szám egyjegyű sem lehet, ha pedig kétjegyű, akkor $y=10a+b$ alakú, ekkor pedig $10a+b-(a+b)=9a=9$ alapján $a=1$.

Tehát y lehetséges értékei 10, 11, 12, $\ldots$, 19. 1 pont

Mivel $f\big(f(x)\big)=y$ 9-cel osztható szám, így $f\big(f(x)\big)$ értéke csak 18 lehet.

Az $f(x)=z$ jelöléssel ekkor $f(z)=18$. 1 pont

Nyilvánvaló, hogy z ebben az esetben is csak kétjegyű szám lehet. Ha $z=10c+d$ alakú, akkor $10c+d-(c+d)=9c$, $9c=18$ alapján pedig $c=2$. 1 pont

Mivel $f(x)=z$ 9-cel osztható szám, így $f(x)$ értéke csak 27 lehet. 1 pont

Ha pedig $f(x)=27$, akkor az előzőek alapján az x szám szintén csak kétjegyű lehet, azaz $10e+f$ alakú, ekkor pedig $10e+f-(e+f)=9e=27$ alapján $e=3$.

Ezek alapján x lehetséges értékei 30, 31, 32, $\ldots$, 39. 1 pont

Az eredeti egyenletnek pedig valóban gyökei is a $30 \leqq x \leqq 39$ összefüggést kielégítő egész számok. 1 pont

---

Összesen: 7 pont

4. Bizonyítsuk be, hogy a $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2006}=\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$ egyenlet megoldható a pozitív egész számok halmazán!

Megoldás. Jelöljük az egyenlet bal oldalán álló számot p-vel! Egyszerű algebrai átalakítások után kifejezhetjük m-et p-vel:

$$\begin{aligned}
p &= \sqrt{m}-\sqrt{m-1}\\
\sqrt{m-1} &= \sqrt{m}-p\\
m-1 &= m+p^2-2p\sqrt{m}\\
2p\sqrt{m} &= p^2+1\\
\sqrt{m} &= \frac{p^2+1}{2p}\\
m &= \left(\frac{p^2+1}{2p}\right)^2=\left(\frac{p+1/p}{2}\right)^2.
\end{aligned}$$

2 pont

Megmutatjuk, hogy $p+1/p$ páros egész, ebből következik az állítás. 1 pont

Mivel $\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)=1$, ezért $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2006}\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)^{2006}=1$, tehát

$$1/p=\left(\sqrt{2}+1\right)^{2006}. \qquad \text{2 pont}$$

Végül a Newton-féle binomiális tétel alapján

$$p+1/p=\left(\sqrt{2}-1\right)^{2006}+\left(\sqrt{2}+1\right)^{2006}=$$

$$=\sum_{i=0}^{2006}\binom{2006}{i}\sqrt{2}^{i}(-1)^{2006-i}+\sum_{i=0}^{2006}\binom{2006}{i}\sqrt{2}^{i}(1)^{2006-i}=$$

$$2\sum_{j=0}^{1003}\binom{2006}{2j}\sqrt{2}^{2j}=2\sum_{j=0}^{1003}\binom{2006}{2j}2^{j},$$

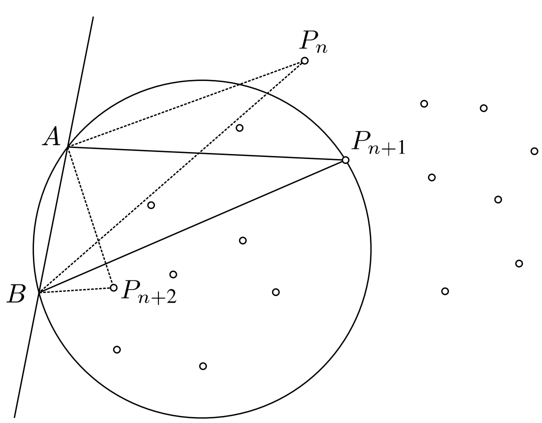
hiszen a páratlan i indexekre az ellenkező előjelű tagok kiejtik egymást, a páros i indexekhez tartozó tagok pedig azonosak a két összegben. Az így kapott kifejezés láthatóan páros egész. 2 pont

---

Összesen: 7 pont

5. Adott $2n+3$ pont a síkon úgy, hogy nincs 3 egy egyenesen, és nincs 4 egy körön. Bizonyítsa be, hogy mindig létezik egy k kör, ami pontosan 3 ponton megy keresztül, és n pont van a kör belsejében és n a körön kívül!

Megoldás.



A $2n+3$ ponttól elég távol vegyünk fel egy e egyenest, úgy, hogy minden pont az egyenes egyik oldalán legyen. Ez megtehető, mert véges sok pontunk van. Toljuk el e-t a ponthalmaz irányába mindaddig, amíg átmegy egy ponton, legyen ez az A pont. Most forgassuk el az e-t A középponttal míg egy másik Bponton is átmegy. Nem lesz ekkor az e-n csak ez a két pont, mert a ponthalmazunk nem tartalmaz három egy egyenesbe eső pontot.

(Azaz legyen e a ponthalmaz konvex burkának egy egyenese, amin A és B a ponthalmaz egy-egy pontja.) 2 pont

Képezzük az összes $AP_iB\sphericalangle$ szöget, ahol a maradék $P_1, P_2, \ldots, P_{2n+1}$ pontok legyenek aszerint indexelve, hogy a nekik megfelelő $AP_iB\sphericalangle$ esetén a kisebb szög kisebb indexet kapjon, tehát $AP_1B\sphericalangle \leqq AP_2B\sphericalangle \leqq \ldots \leqq AP_{2n+1}B\sphericalangle$. 1 pont

Ha létezik olyan P_i és P_j úgy, hogy $AP_iB\sphericalangle = AP_jB\sphericalangle$, akkor P_i és P_j egy körön vannak, (mert a P_i és P_j az AB $AP_iB\sphericalangle$ szögű látókörívén vannak rajta), de a feladat feltételei nem engednek meg 4 pontot egy körön. Tehát $AP_1B\sphericalangle < AP_2B\sphericalangle < \ldots < AP_{2n+1}B\sphericalangle$, $2n+1$ különböző értékünk van. 2 pont

A $2n+1$ növekvő sorozatban az $n+1$. elem a középső.

A P_{n+1}, A és B pontokon átmenő kör megoldása a feladatnak, mert a $P_1, \ldots, P_n$ n darab pont által meghatározott $AP_iB\sphericalangle$ szögek kisebbek az $AP_{n+1}B\sphericalangle$ szögnél, ezért a szögcsúcsok a körön kívül vannak. A $P_{n+2}, \ldots, P_{2n+1}$ n darab pont által meghatározott $AP_iB\sphericalangle$ szögek nagyobbak az $AP_{n+1}B\sphericalangle$ szögnél, ezért ezek a szögek a körön belül helyezkednek el, tehát a szögek megfelelő csúcsa is. 2 pont

---

Összesen: 7 pont