Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2005/2006 10. évfolyam 3. kategória 2. forduló

A verseny szervezője: Országos Közoktatási Szolgáltató Intézmény Pedagógiai Központ

1. feladat

Az *AB* átfogójú derékszögű háromszögben *AC*>*BC*. A háromszög köréírt körét a *C* csúcsból induló magasságvonal az *E*, míg a *C*-ből induló belső szögfelező a *D* pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy a *BCDE* négyszög területe megegyezik az *ABC* háromszög területével.

2. feladat

Definiáljuk az x_i sorozatot a következőképpen:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1, \\ x_{k+1} &= x_k^2 + x_k, \qquad k \geq 1, \qquad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Bizonyítsuk be, hogy az

$$S = \frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \frac{1}{1+x_3} + \ldots + \frac{1}{1+x_{2006}}$$

összeg 1-nél kisebb!

3. feladat

Bizonyítsuk be, hogy az egységnyi oldalú *ABCD* négyzet belsejében végtelen sok olyan *P* pont van, amelyre igaz, hogy a $\frac{PB}{PA}$, $\frac{PC}{PA}$, $\frac{PD}{PA}$ arányok mindegyike racionális szám.