Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási és Kulturális Minisztérium
Támogatáskezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2006/2007-es tanév
1. forduló
haladók III. kategória

Feladatok

1. Melyek azok az x valós számok, amelyekre igaz, hogy

$$\frac{8}{\sqrt{x+6}-\sqrt{x-2}} \leqq 6-\sqrt{x+1}?$$

2. Az ABC háromszög BM és CN súlyvonalának metszéspontja S, és tudjuk, hogy $AMSN$ érintőnégyszög. Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög egyenlő szárú!

3. Egy egységnyi élű kocka alaplapja az $ABCD$ négyzet. A kocka A_1, B_1, C_1, D_1 csúcsaira teljesül, hogy AA_1, BB_1, CC_1 és DD_1 párhuzamosak. Az AC_1 testátló két harmadolópontja P és Q. A D_1P és a D_1Q egyenes az $ABCD$ lap síkját a K, illetve az E pontban metszi. Határozzuk meg az AK és az AE szakaszok hosszát!

4. Tekintsük azokat a pozitív egész számokat, amelyekre igaz, hogy számjegyeik összege és szorzata is 9^{2007}. Igazoljuk, hogy egyetlen megfelelő szám számjegyeinek száma sem lehet négyzetszám.

5. Egy kör kerületét 10 darab piros és 12 darab kék pont ívekre bont. Ezekre az ívekre számokat írunk a következő módon: két piros pont közötti ívre 2-t, két kék pont közötti ívre $\frac{1}{2}$-et, egy piros és egy kék közti ívre 1-et.

Mennyi lehet ezeknek a számoknak a szorzata a piros és kék pontok különböző elrendezése esetén?