Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási és Kulturális Minisztérium
Támogatáskezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2006/2007-es tanév
3. (döntő) forduló
kezdők I. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Egy háromszög oldalai cm-ben mérve egész számok. Egyik oldala 2007 cm, a másik kettő legfeljebb ekkora. Hány ilyen háromszög van?

Megoldás. A háromszög oldalaira fennáll: $a \geqq b \geqq c$ és $a < b + c$. A lehetséges eseteket az alábbi táblázat tartalmazza.

a	b	c	darabszám
2007	2007	$1, 2, 3, \ldots, 2007$	2007
2007	2006	$2, 3, 4, \ldots, 2006$	2005
2007	2005	$3, 4, 5, \ldots, 2005$	2003
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
2007	1004	1004	1

Tehát: $1 + 3 + 5 + \ldots + 2003 + 2005 + 2007 = 1004 \cdot \dfrac{1 + 2007}{2} = 1\,008\,016$ megfelelő háromszög van.

2. Egy négyzetrácsot 11 vízszintes és 11 függőleges vonal határoz meg. A vonalak metszéspontjai közül kijelölünk 20 pontot és bármelyik kettőt szakasszal kötünk össze. Mutassa meg, hogy e szakaszok között van négy azonos hosszúságú!

Megoldás. A négyzetrács összesen $11 \cdot 11 = 121$ metszésponttal rendelkezik. A kijelölt 20 pont összesen $(20 \cdot 19)/2 = 190$ szakaszt határoz meg. Vegyük sorra, hogy milyen szakaszok fordulhatnak elő ebben a négyzetrácsban. Egy szakasz x- és y-irányú vetülete is 0-tól 10 egység hosszú lehet. Úgy tekinthetünk egy szakaszt, mint egy olyan (esetleg elfajult) derékszögű háromszög átfogóját, amelynek befogói ezek az x-, illetve y-irányú vetületek. Ilyen derékszögű háromszögből egybevágóság erejéig $(12 \cdot 11)/2 = 66$ különböző lehetséges. Nem mindnek lesz különböző hosszú az átfogója: $3^2 + 4^2 = 0^2 + 5^2$, $7^2 + 4^2 = 1^2 + 8^2$, $6^2 + 8^2 = 0^2 + 10^2$. Ezért legfeljebb $66 - 3 = 63$ különböző átfogó-hossz van. Mivel $190/63 > 3$, azért biztosan lesz négy azonos hosszúságú szakasz.

3. Legyen $A := x^{10}(y^5 - z^5) + y^{10}(z^5 - x^5) + z^{10}(x^5 - y^5)$. Igazolja, hogy ha x, y és z 11-gyel nem osztható pozitív egész számok, akkor $|A|$ osztható 11-gyel!

Megoldás. Szorzattá alakítva a kifejezést $A = (x^5 - y^5) \cdot (x^5 - z^5) \cdot (y^5 - z^5)$. Egy pozitív egész szám 5-ik hatványa 11-gyel osztva csak 0, 1 vagy 10 maradékot adhat. Mivel x, y és z egyike sem osztható 11-gyel, a maradék csak 1, vagy 10 lehet. Tehát van a három szám között kettő olyan, amelynek 5-ik hatványa 11-gyel osztva ugyanazt a maradékot adja. Ezek különbsége osztható lesz 11-gyel, vagyis a fenti kifejezésben a megfelelő tényező 11-gyel osztható lesz.