Bolyai János

Matematikai Társulat

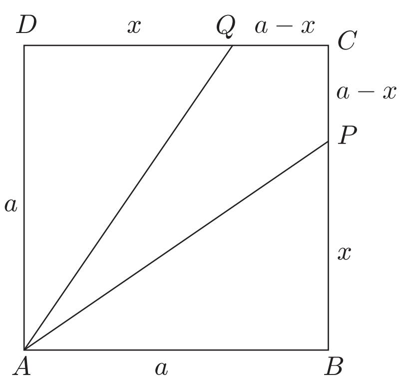
Oktatási és Kulturális Minisztérium
Támogatáskezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2007/2008-as tanév
3. (döntő) forduló
kezdők I. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Egy négyzet egyik csúcsából úgy húzunk két félegyenest, hogy azok a négyzetet három síkidomra bontsák fel. Mekkora ennek a három síkidomnak a területe, ha kerületük ugyanakkora és a négyzet oldalainak hossza a?

Megoldás.



Mivel a kerületek megegyeznek, azért AC-re szimmetrikus az ábra, tehát: $BP = DQ = x$.
$CP = CQ = a - x$ és $AP = AQ = \sqrt{a^2 + x^2}$.
$K_{ABP} = K_{APCQ}$, tehát:

$$a + x + \sqrt{a^2 + x^2} = 2(a - x) + 2 \cdot \sqrt{a^2 + x^2},$$

azaz:

$$3x - a = \sqrt{a^2 + x^2}.$$

Ebből négyzetre emeléssel és egyszerű átalakításokkal a következő egyenletet kapjuk: $2x(4x - 3a) = 0$. Így csak $x = \dfrac{3a}{4}$ lehet.

Ekkor, $AP = \dfrac{5a}{4}$ és $K_{ABP} = K_{APCQ} = K_{ADQ} = 3a$.

$$T_{ABP} = T_{ADQ} = \frac{a \cdot \frac{3a}{4}}{2} = \frac{3a^2}{8} \quad \text{és} \quad T_{APCQ} = T_{ABCD} - 2 \cdot T_{ABP} = a^2 - \frac{3a^2}{4}.$$

2. Egy matematika órán a tanár felírt egy pozitív egész számot a táblára. Az egyik diák így szólt: a szám osztható 31-gyel. A második diák azt mondta, hogy a szám osztható 30-cal, a harmadik pedig azt, hogy a szám osztható 29-cel. Ezt a felsorolást addig folytatták a diákok, amíg a harmincadik is megszólalt: a szám osztható 2-vel. A tanár ezek után közölte, hogy a fenti harminc állítás közül csak kettő hamis és a két hamis állítás közvetlenül egymás után hangzott el. Melyik volt a két hamis állítás?

Megoldás. Legyen a két szám közül, amellyel a felírt szám nem osztható a kisebbik n $(2 \leqq n \leqq 30)$. Ekkor a felírt szám nem lehet $(2n)$-nel osztható. Mivel $n \geqq 2$ esetén n és $2n$ nem lehetnek szomszédosak, $2n$ nem lehet a felsorolt osztók között, ezért $2n > 31$, vagyis $n > 15$. Ezért a felírt szám osztható minden 16-nál kisebb számmal. Tehát osztható a 16-nál kisebb páratlan számok 2-szeresével, 4-szeresével és 8-szorosával is. Így n nem lehet 16-nál nagyobb páros szám. Ugyanezért nem lehet páratlan sem, mert ekkor a felírt szám az $n+1$ páros számmal nem lenne osztható. Tehát a szám 16-tal és 17-tel nem osztható.

Ilyen szám létezik. Pl. $7 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 25 \cdot 27 \cdot 29 \cdot 31$.

3. Adott egy 2008×2008-as négyzetrács. Behúzunk egy a négyzetrácsot metsző egyenest. Legfeljebb hány mező belsején haladhat át ez az egyenes?

Megoldás. Ha egy egyenes valamelyik rácsvonalra illeszkedik, akkor egyetlen mezőn sem halad át, ha nem, akkor minden rácsvonallal legfeljebb egy metszéspontja van. Az egyenesnek a rácsvonalakkal való metszéspontjai az egyenes négyzetrácson belüli részét szakaszokra bontja fel. Minden szakasz egy mezőben van és egy mezőbe legfeljebb egy szakasz esik. Így elég ezeket a szakaszokat megszámolni. Az egyenes a négyzetrács kerületét legfeljebb két pontban metszi. A többi rácsvonal bármelyikét legfeljebb egy pontban metszheti. Így a metszéspontok maximális száma: $2 \cdot 2007 + 2 = 4016$, azaz legfeljebb 4015 szakasz jöhet létre, így az egyenes legfeljebb 4015 mezőn haladhat át. Valamelyik átlóval párhuzamos és ahhoz „közel” lévő egyenes 4015 mezőn halad át.