**Bolyai János**

**Matematikai Társulat**

Oktatási és Kulturális Minisztérium
Támogatáskezelő Igazgatósága
támogatásával

# Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
# 2008/2009-es tanév
# 3. (döntő) forduló
# haladók II. kategória

### Megoldások és javítási útmutató

**1.** Legyen $p$ egy tetszőleges természetes szám. Határozzuk meg az

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=p$$

egyenlet összes nullától különböző és páronként relatív prím $x$, $y$, $z$ egészekből álló megoldását!

**Megoldás.** Egyenletünk az $x^2z+y^2x+z^2y=pxyz$ egyenlettel ekvivalens, mivel $x$, $y$, $z$ nullától különböző páronként relatív prím egész számok. Ebből az egyenletből következik, hogy $y|x^2z$, $z|y^2x$, $x|z^2y$. 2 pont

Mivel innen $(x,y)=1$ és $(z,y)=1$, ezért $(x^2z,y)=1$, tehát az $y|x^2z$ összefüggésből következik, hogy $y=\pm1$ kell, hogy legyen. Hasonlóan kapjuk, hogy $z=\pm1$, $x=\pm1$. 3 pont

Ha $x$, $y$ és $z$ egyező előjelű, akkor egyenletünkből az $1+1+1=p$, vagyis $p=3$ következik. Ha $x$, $y$, $z$ számok közül kettő pozitív és egy negatív, vagy kettő negatív és egy pozitív lenne, akkor egyenletünkből az következne, hogy $p$ negatív, ami ellentétben áll a $p$-re tett kikötéssel. 1 pont

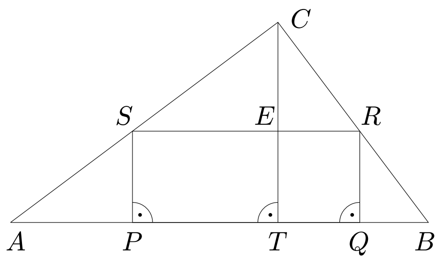
Tehát ha $p$ természetes szám, akkor az egyenletünknek csak akkor létezik nullától különböző és páronként relatív prím $x$, $y$, $z$ egészekből álló megoldása, ha $p=3$, és ekkor is csak a következő két megoldása van: $x=y=z=1$ és $x=y=z=-1$. Ha $p\neq3$ természetes szám, akkor nincs az egyenletünknek az egész számok körében olyan megoldása, hogy $x$, $y$ és $z$ nullától különbözőek és páronként relatív prímek legyenek. 1 pont

---

Összesen: 7 pont

**2.** Az $ABC$ hegyesszögű háromszög oldalai egész szám egység hosszúak. A háromszögbe legalább két olyan egyenlő kerületű téglalap is írható, amelyeknek két csúcsa az $AB$ oldal, másik két csúcsa pedig a másik két oldal egy-egy pontja. Bizonyítsuk be, hogy az $ABC$ háromszög területének kétszerese négyzetszám.

**Megoldás.** Tekintsük a következő ábrát:




Az ábrának megfelelően legyen $AB = c$, $CT = m$, $PQ = SR = x$, $PS = QR = y$.

Az $ABC$ és $SRC$ háromszögek középpontosan hasonlóak a $C$ csúcsra nézve, ezért $\dfrac{SR}{AB} = \dfrac{CE}{CT}$, azaz $\dfrac{x}{c} = \dfrac{m-y}{m}$, ahonnan $x = c - \dfrac{c}{m}\,y$, ahol $0 < y < m$. 1 pont

A beírt $PQRS$ téglalap $k$ kerülete ekkor

$$k = 2(x+y) = 2\left(c - \frac{c}{m}\,y + y\right) = 2\,\frac{m-c}{m}\,y + 2c. \qquad \text{1 pont}$$

A $k$ kerület értéke csak $y$ függvénye, ezért a $k(y) = 2\,\dfrac{m-c}{m}\,y + 2c$ formailag elsőfokú függvényre a $]0; m[$ intervallumon teljesülnie kell, hogy $k(y_1) = k(y_2)$ a feladat feltételei szerint. 1 pont

Viszont egy elsőfokú függvény szigorúan monoton, ezért $k(y_1) = k(y_2)$ teljesülése lehetetlen, ha $m \neq c$. 1 pont

A $k(y)$ függvény tehát nulladfokú (konstans) függvény. Ekkor pedig $m = c$ és $k(y) = 2c$. 1 pont

Mivel $c$ egész szám, így az $ABC$ háromszög $t$ területe: $t = \dfrac{c \cdot m}{2} = \dfrac{c^2}{2}$, azaz $2t = c^2$ valóban négyzetszám. 2 pont

---

Összesen: 7 pont

**3.** Legyen $k$ természetes szám. A $36k^2 + 268k + 2009$-et szeretnénk $n$ darab páratlan négyzetszám összegeként felírni.

$a$) Bizonyítsuk be, hogy ez $2 \leqq n \leqq 8$ esetén nem lehetséges.

$b$) Mutassuk meg, hogy $n = 9$-re mindig van megoldás.

**Megoldás.** $a$) Egy páratlan négyzetszám 8-cal osztva 1 maradékot ad, hiszen $x \in \mathbb{N}$ esetén $(2x+1)^2 = 4x(x+1) + 1$, ahol $x(x+1)$ páros szám. 1 pont

A $36k^2 + 268k + 2009$ összeg a $4k(9k+67) + 8 \cdot 251 + 1$ átalakításokkal $8m + 1$ alakú, ahol $m \in \mathbb{N}$, hiszen $k(9k+67)$ páros szám. 1 pont

Ez pedig azt jelenti, hogy az adott összeg megfelelő előállításához legalább 9 darab páratlan négyzetszámra van szükség, mert redukált alakban a 8-as maradékok összegének 1-nek kell lennie. 1 pont

$b)$ $k=0$ esetén egy megfelelő előállítás a következő:

$$2009=43^2+11^2+5^2+3^2+1^2+1^2+1^2+1^2+1^2.$$ 1 pont

Mivel $36k^2=9\cdot(2k)^2$ és $2009=43^2+11^2+5^2+3^2+5\cdot 1^2$, ezért próbálkozhatunk a

$$(2k+43)^2+(2k+11)^2+(2k+5)^2+(2k+3)^2+$$
$$+(2k+1)^2+(2k+1)^2+(2k+1)^2+(2k+1)^2+(2k+1)^2$$

előállítással. 1 pont

A $4k(43+11+5+3+1+1+1+1+1)=268k$ összefüggés alapján a

$$36k^2+268k+2009=(2k+43)^2+(2k+11)^2+(2k+5)^2+(2k+3)^2+5\cdot(2k+1)^2$$

előállítás valóban megfelelő bármely $k\in\mathbb{N}$ esetén, tehát 9 darab páratlan négyzetszámból előállítható az adott összeg. 2 pont

---

Összesen: 7 pont