Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási és Kulturális Minisztérium
Támogatáskezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2008/2009-es tanév
1. forduló
haladók III. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Az (a_n) számsorozatra $n \geqq 1$ esetén $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 3)$ teljesül. Mi lehet a_1 lehető legkisebb értéke, ha a sorozat első 2009 darab tagja pozitív egész szám, az összes többi tagja pedig nem az?

Megoldás. A képzési szabály alapján $a_2 = \frac{1}{2}\,a_1 + \frac{3}{2}$, $a_3 = \frac{1}{4}\,a_1 + \frac{9}{4}$, $a_4 = \frac{1}{8}\,a_1 + \frac{21}{8}$, $a_5 = \frac{1}{16}\,a_1 + \frac{45}{16}$, $a_6 = \frac{1}{32}\,a_1 + \frac{93}{32}$, ... 1 pont

Az $a_{n+1} = \frac{1}{2}\,a_n + \frac{3}{2}$ szabály $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \ldots$-re történő alkalmazása alapján sejtésünk az, hogy

$$a_n = \frac{1}{2^{n-1}}\,a_1 + \frac{3 \cdot 2^{n-1} - 3}{2^{n-1}} = \frac{a_1 - 3}{2^{n-1}} + 3.$$ 1 pont

A sejtés helyességét a teljes indukció módszerével igazolhatjuk. A korrekt bizonyításért: 2 pont

A bizonyított formula alapján

$$a_{2009} = \frac{a_1 - 3}{2^{2008}} + 3 \text{ és } a_{2010} = \frac{a_1 - 3}{2^{2009}} + 3.$$

Mivel a_{2009} pozitív egész szám, ezért $a_1 = 2^{2008} \cdot k + 3$ alakú, ahol $k \in \mathbb{N}$.

Az a_1 tag értéke minimális, ha $k = 1$, mert $k = 0$ esetén az (a_n) sorozat mindegyik tagja 3 lenne, ami nem felel meg a feltételeknek. 1 pont

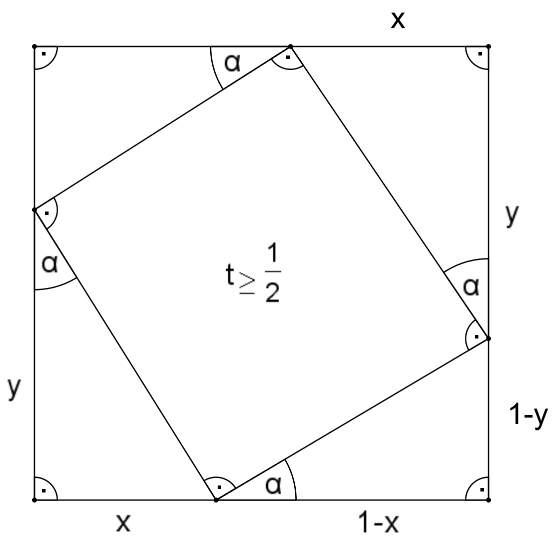
Ha viszont $k = 1$ esetén $a_1 = 2^{2008} + 3$, akkor $a_n = \frac{2^{2008}}{2^{n-1}} + 3$, ami $n = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2009$ esetén nyilvánvalóan pozitív egész szám. 1 pont

Ha pedig $n > 2009$, akkor $a_n = \frac{1}{2^{n-2009}} + 3$, ami pedig nem lehet egész szám, így a_1 minimuma $2^{2008} + 3$. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Egy egységnégyzetbe írt téglalap csúcsai a négyzet különböző oldalainak belső pontjai. Bizonyítsuk be, hogy ha a téglalap területe legalább $\frac{1}{2}$, akkor a téglalap négyzet.

Megoldás. Tekintsük a következő ábrát:



Az ábrán jelölt α szögek nyilvánvalóan egyenlők, ezért az egymással szemközti derékszögű háromszögek egybevágóak. Ezért a téglalap t területére $t = 1 - xy - (1-x)(1-y) =$ $= x + y - 2xy$ teljesül. 1 pont

Az ábra bármely két derékszögű háromszöge hasonló, így $\frac{1-y}{1-x} = \frac{x}{y}$, azaz 1 pont

$y - y^2 = x - x^2$, így $(x-y)(x+y-1) = 0$. 1 pont

Ha $x = y$, akkor $t = 2x - 2x^2 \geqq \frac{1}{2}$ alapján $0 \geqq \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ teljesül, ami csak $x = y = \frac{1}{2}$ esetén lehetséges. Ekkor pedig a téglalap valóban négyzet, csúcsai az eredeti négyzet oldalfelező pontjai. 2 pont

Ha $x + y = 1$, akkor $y = 1 - x$. Így pedig mind a négy sarokháromszög egybevágó, hiszen befogóik hossza egyenlő. Az átfogók hossza is azonos tehát, ekkor pedig a téglalap négyzet. 1 pont

A négyzet területe pedig legalább $\frac{1}{2}$, hiszen $t = 1 - 2x(1-x)$ alapján $2x^2 - 2x + 1 =$ $= 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = t \geqq \frac{1}{2}$. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. Definiáljuk az f függvényt a pozitív egészek körében a következőképpen:

$$f(1) = 2009 \text{ és}$$

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = n^2 f(n).$$

Adjuk meg $f(2009)$ pontos értékét!

1. megoldás.

$$f(1) = 2009$$

Számoljuk ki $f(n)$ értékét az első néhány n-re! Helyettesítsük be a második feltételbe $f(1)$-et:

$$2009 + f(2) = 2^2 f(2).$$

Ebből rendezés után kapjuk, hogy

$$f(2) = \frac{1}{3}2009.$$

Helyettesítsük be a második feltételbe $f(1)$-et és $f(2)$-t:

$$2009 + \frac{1}{3}2009 + f(3) = 3^2 f(3).$$

Ebből rendezés után kapjuk, hogy

$$f(3) = \frac{1}{6}2009.$$

$f(1)$-et, $f(2)$-t, $f(3)$-at behelyettesítve $f(4)$-re

$$f(4) = \frac{1}{10}2009\text{-et kapunk.}$$ 1 pont

Írjuk fel az $f(n)$-et definiáló képletet az első $(k-1)$, illetve k tagra:

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(k-1) + f(k) = k^2 f(k)$$
$$f(1) + f(2) + \ldots + f(k-1) = (k-1)^2 f(k-1)$$

Vonjuk ki a két egyenletet egymásból:

$$f(k) = k^2 f(k) - (k-1)^2 f(k-1)$$

$$f(k) = \frac{k-1}{k+1} f(k-1)$$ 3 pont

$$f(2009) = \frac{2008}{2010} f(2008) = \frac{2008}{2010} \cdot \frac{2007}{2009} \cdot f(2007) = \ldots =$$
$$= \frac{2008}{2010} \cdot \frac{2007}{2009} \cdot \frac{2006}{2008} \cdot \frac{2005}{2007} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} f(1) =$$

$$=\frac{2}{2010\cdot 2009}2009=\frac{1}{1005}.$$ 2 pont

Tehát $f(2009)$ pontos értéke $\frac{1}{1005}$. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. megoldás.

$$f(1)=2009$$

Számoljuk ki $f(n)$ értékét az első néhány n-re! Helyettesítsük be a második feltételbe $f(1)$-et:

$$2009+f(2)=2^2f(2).$$

Ebből rendezés után kapjuk, hogy

$$f(2)=\frac{1}{3}2009.$$

Helyettesítsük be a második feltételbe $f(1)$-et és $f(2)$-t:

$$2009+\frac{1}{3}2009+f(3)=3^2f(3).$$

Ebből rendezés után kapjuk, hogy

$$f(3)=\frac{1}{6}2009.$$

$f(1)$-et, $f(2)$-t, $f(3)$-at behelyettesítve $f(4)$-re

$f(4)=\frac{1}{10}2009$-et kapunk. 1 pont

A sejtésünk az, hogy $f(n)=\frac{1}{S(n)}\cdot 2009$, ahol a nevezőben lévő $S(n)$ az első n pozitív egész szám összege. Teljes indukcióval bizonyítsunk. Az első néhány esetre ez az állítás igaz. Tegyük fel, hogy igaz az állításunk az első $k-1$ tagra. Tekintsük az $f(k)$-t meghatározó egyenletet:

$$2009+\frac{1}{3}2009+\frac{1}{6}2009+\frac{1}{10}2009+\ldots+\frac{2}{(k-1)k}+f(k)=k^2f(k)$$

$$2009\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{2}{(k-1)k}\right)=(k^2-1)f(k)$$

$$2009\left(\frac{2}{2\cdot 1}+\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 4}+\frac{2}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{2}{(k-1)k}\right)=(k^2-1)f(k)$$ 3 pont

Kettőt kiemelve, és a zárójelben lévő törteket két tört különbségévé alakítva:

$$2009\cdot 2\cdot\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\pm\ldots+\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=(k^2-1)f(k)$$

$$2009 \cdot 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{k}\right) = (k-1)(k+1)f(k)$$

$$f(k) = \frac{2}{k(k+1)}2009$$

Tehát állításunk igaz. 2 pont

Behelyettesítve $n = 2009$-et, $f(2009) = \frac{2}{2009 \cdot 2010}2009 = \frac{1}{1005}$.

Tehát $f(2009)$ pontos értéke $\frac{1}{1005}$. 1 pont

Összesen: 7 pont

4. Az ABC háromszög beírt köre az AB, BC, CA oldalakat rendre az F, D, E pontokban érinti. Az AFE, BDF és CED háromszögek beírt körének középpontja rendre A_1, B_1 és C_1.

a) Bizonyítsuk be, hogy A_1, B_1 és C_1 rajta vannak az ABC beírt körén!

b) Bizonyítsuk be, hogy az A_1D, B_1E és C_1F szakaszok átmennek az $A_1B_1C_1$ háromszög magasságpontján!

Megoldás. Jelölje a beírt kör középpontját O, az FE szakasz felezőpontját R, a háromszög belső szögeit pedig α, β, γ, a szokásos módon.

a) Elegendő az A_1 pontra bizonyítani, a másik két pont esetében hasonlóan megy az indoklás. Azt fogjuk megmutatni, hogy $OA_1 = OF$. Mivel OF a beírt kör sugara, ebből következik a bizonyítandó állítás. 1 pont

Az AFE háromszög egyenlő szárú, mert AF és AE közös pontból húzott érintőszakaszok. Innen $AFE\sphericalangle = 90° - \frac{\alpha}{2}$. A beírt kör középpontja a belső szögfelezők metszéspontja, ezért egyrészt A_1 rajta van az ABC háromszög A-ból induló, és a beírt kör O középpontján átmenő belső szögfelezőjén, másrészt $A_1FA\sphericalangle = 45° - \frac{\alpha}{4}$. 1 pont

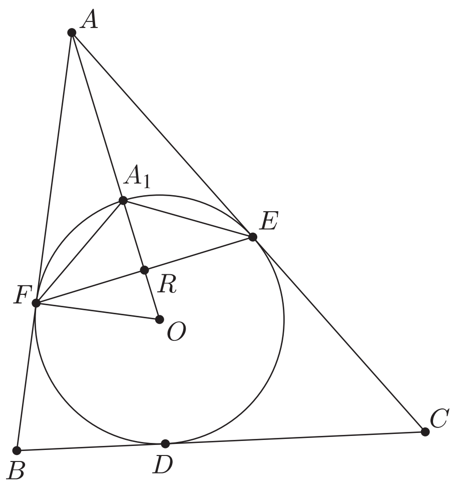
Innen $A_1FO\sphericalangle = 90° - A_1FA\sphericalangle = 45° + \frac{\alpha}{4}$.

Az FEA_1 háromszög is egyenlő szárú, továbbá AO az FE felezőmerőlegese, ebből

$$FA_1O\sphericalangle = FA_1R\sphericalangle = 90° - A_1FE\sphericalangle = 45° + \frac{\alpha}{4}.$$ 1 pont

Beláttuk, hogy A_1FO egyenlő szárú, $OF = OA_1$, tehát A_1 valóban rajta van a beírt körön.

Megjegyzés: mivel AFE egyenlő szárú, az is igaz, hogy A_1 az FE ív felezőpontja.



b) Most is elég az egyik szakaszra – modjuk DA_1-re – bizonyítani. Az állítás szerint A_1D magasságvonal $A_1B_1C_1$-ben, tehát azt kell belátnunk, hogy A_1D merőleges B_1C_1-re.

Ezt úgy fogjuk megtenni, hogy megmutatjuk, hogy A_1SC_1 derékszögű, ahol S az A_1D és B_1C_1 szakaszok metszéspontja. 1 pont

A kerületi és középponti szögek tételét fogjuk többször alkalmazni az ABC háromszög beírt körére. Az a) pont alapján azt már tudjuk, hogy A_1, B_1 és C_1 a körön vannak.

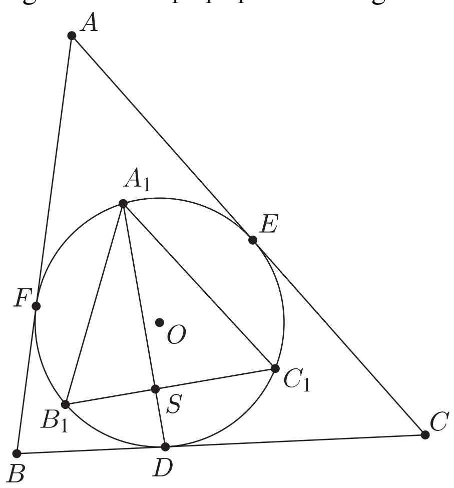
$SA_1C_1\sphericalangle = DA_1C_1\sphericalangle = \frac{1}{2}DOC_1\sphericalangle = \frac{1}{4}DOE\sphericalangle$, hiszen az a) pontban láttuk, hogy A_1, B_1 és C_1 rendre az FE, FD és DE ívek felezőpontja. 1 pont

$SC_1A_1\sphericalangle = B_1C_1A_1\sphericalangle = \frac{1}{2}B_1OA_1\sphericalangle = \frac{1}{2}(B_1OF\sphericalangle + A_1OF\sphericalangle) = \frac{1}{4}(FOD\sphericalangle + FOE\sphericalangle)$ 1pont

Az eddigieket összegezve: $SA_1C_1\sphericalangle + SC_1A_1\sphericalangle = \frac{1}{4}(DOE\sphericalangle + FOD\sphericalangle + FOE\sphericalangle) =$

$= \frac{1}{4} \cdot 360° = 90°$, amiből $A_1SC_1\sphericalangle = 90°$ következik. 1 pont

Tehát A_1D valóban magasságvonal az $A_1B_1C_1$ háromszögben.



Összesen: 7 pont

5. Van 25, nem feltétlenül azonos tömegű csokidarabunk. Egyetlen darabot megfelelően kettévágva el tudjuk-e osztani a csokoládét két gyerek között úgy, hogy darabra és tömegre is azonos mennyiséget kapjanak?

Megoldás. Jelölje $g_1 \leqq g_2 \leqq g_3 \leqq \ldots \leqq g_{24} \leqq g_{25}$ a csokidarabok tömegét. 1 pont

A g_{25} tömegű darab kivételével felosztom a készletet, a következőképpen:

$$S_1 = g_1 + g_3 + \ldots + g_{23}$$

és

$$S_2 = g_2 + g_4 + \ldots + g_{24},$$

ahol nyilvánvaló, hogy $S_1 \leqq S_2$. 1 pont

Megvizsgálom a két összeg különbségét:

1 pont 1 pont 1 pont

$$0 \leqq S_2 - S_1 = g_{24} \underbrace{-g_{23} + g_{22}}_{\leqq 0} -g_{21} + g_{20} - \ldots - g_5 + g_4 \underbrace{-g_3 + g_2}_{\leqq 0} -g_1 \leqq g_{24} - g_1 \leqq g_{24} \leqq g_{25}$$

$\leqq 0$

A megmaradt darabot két részre osztom: $g_{25} = c + d$, ahol

$c = \dfrac{1}{2}\left[g_{25} + (S_2 - S_1)\right]$ és

$d = \dfrac{1}{2}\left[g_{25} - (S_2 - S_1)\right]$ 1 pont

Az $S_1 + c = S_2 + d = \dfrac{1}{2}(g_{25} + S_1 + S_2)$ felosztás alapján a feladat kérdésére igenlő a válasz. 1 pont

---

Összesen: 7 pont