Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási és Kulturális Minisztérium
Támogatáskezelő Igazgatósága
támogatásával

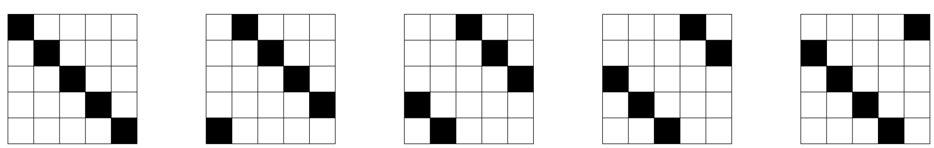
Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2008/2009-es tanév
3. (döntő) forduló
kezdők I. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Egy 1 cm élhosszúságú, átlátszó és fekete kockákból egy 5 cm élhosszúságú nagyobb kockát építettünk. Legalább hány fekete kockát használtunk fel, ha a nagy kocka mind elöl-, mind oldal-, mind felülnézetből feketének látszik?

Megoldás. Mivel a kocka felülnézetből feketének látszik, minden „oszlopban” kell lennie fekete kockának, azaz legalább 25 fekete kockát fel kellett használnunk.

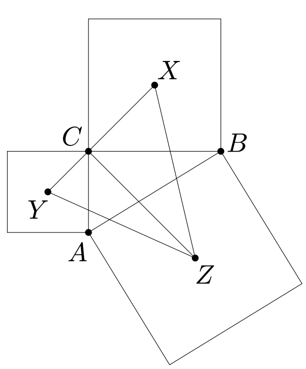
Egy példán megmutatjuk, hogy ennyi elég is. Bontsuk a kockát 5 rétegre:



Mivel minden rétegre igaz, hogy minden sorban és oszlopban is van fekete kocka, így oldal- és elölnézetből minden réteg fekete. A rétegeket egymásra helyezve, minden „oszlopba” kerül fekete kocka, így a nagy kocka felülnézetből is fekete lesz.

2. Az ABC egységnyi területű derékszögű háromszög minden oldalára kifelé egy-egy négyzetet rajzolunk. Ezek középpontja X, Y és Z. Bizonyítsa be, hogy az XYZ háromszög területe legalább 2 egység!

Megoldás. Készítsünk ábrát!



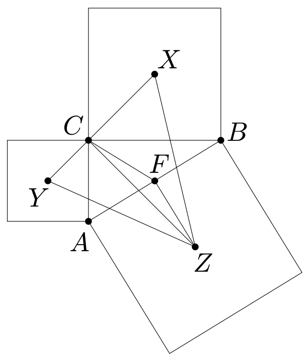
Mivel $YCX\sphericalangle = 45° + 90° + 45° = 180°$, Y, C és X pontok egy egyenesbe esnek.

Be fogjuk bizonyítani, hogy CZ merőleges XY-ra.

Ehhez vegyük fel az átfogó F felezőpontját, és kössük össze a C, illetve a Z ponttal.

Jelölje a CBA szöget β!

A BFC háromszög egyenlőszárú, mivel a Thalész-tétel megfordításának értelmében F a háromszög köré írt kör középpontja, így $FC = FB$. Így az FCB szög is β.



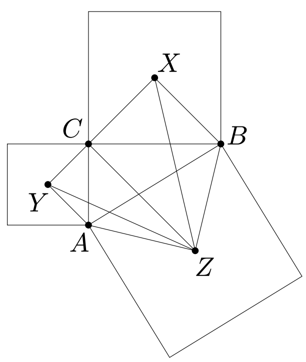
A CFA szög a BFC háromszög külső szöge, így nagysága 2β. A CFZ szög így $90^\circ + 2\beta$. A CFZ háromszög is egyenlőszárú, mivel $FC(= FB) = FZ$. Így a

$$ZFC\sphericalangle = \frac{180^\circ - (90^\circ + 2\beta)}{2} = 45^\circ - \beta.$$

Így

$$ZCX\sphericalangle = ZFC\sphericalangle + FCB\sphericalangle + BCX\sphericalangle =$$

$$= (45^\circ - \beta) + \beta + 45^\circ = 90^\circ.$$



Vegyük fel az $XBZAY$ ötszöget!

Mivel beláttuk, hogy CZ merőleges XY-ra, és XB is merőleges XY-ra, az XB és a CZ szakaszok párhuzamosak. Ezért az XBZ és az XBC háromszögek területe megegyezik, mivel egybeesik egy oldaluk (XB) és a hozzá tartozó magasságuk (XC) is egyenlő. Így $T_{XBZ} = T_{XBC} = \dfrac{a^2}{4}$.

Hasonlóan belátható, hogy $T_{YAZ} = T_{YAC} = \dfrac{b^2}{4}$.

Az ötszög területe:

$$T_{XBZAY} = T_{CXB} + T_{BZA} + T_{AYC} + T_{ABC} = \frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{b^2}{4} + \frac{ab}{2}.$$

Így az XYZ háromszög területe:

$$T_{XYZ} = T_{XBZAY} - (T_{XBZ} + T_{YAZ}) = \left(\frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{ab}{2}\right) - \left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}\right) = \frac{c^2}{4} + \frac{ab}{2}.$$

Be kell látnunk, hogy az XYZ háromszög terület legalább 2, azaz $\dfrac{c^2}{4} + \dfrac{ab}{2} \geqq 2$.

A feladat feltételei szerint $T_{ABC} = \dfrac{ab}{2} = 1$. Elég tehát belátnunk, hogy $\dfrac{c^2}{4} + \dfrac{ab}{2} \geqq ab$.

Innen a Pitagorasz-tétel felhasználásával kapjuk, hogy $\dfrac{a^2 + b^2}{4} + \dfrac{ab}{2} \geqq ab$.

Ennek igazolásához szorozzuk mindkét oldalt 4-gyel: $a^2 + b^2 + 2ab \geqq 4ab$.

Ez ekvivalens $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geqq 0$ összefüggéssel, ami valóban teljesül. Így az eredeti állítsunk is igaz, azaz $T_{XYZ} \geqq 2$.

3. Mely p, q és r prímszámokra teljesül, hogy $p^2 + q^2 + r^2 = 10\,235$?

Megoldás. Egy 3-tól különböző prím négyzete mindig 1 maradékot ad 3-mal osztva. Ezért három 3-tól különböző prím négyzetének az összege mindig osztható 3-mal. Mivel $10\,235$ nem osztható 3-mal, így ha létezik megfelelő számhármas, akkor a 3-as számnak szerepelnie kell benne. Legyen például $p = 3$.

Egy 5-től különböző prím négyzete mindig 1 vagy -1 maradékot ad 5-tel osztva. Ezért három 5-től különböző prím négyzetének az összege sosem osztható 5-tel. Mivel $10\,235$ osztható 5-tel, így ha létezik megfelelő számhármas, akkor az 5-ös számnak szerepelnie kell benne. Legyen például $q = 5$.

Így tehát $r^2 = 10\,235 - p^2 - q^2 = 10\,235 - 9 - 25 = 10\,201 = 101^2$.

A 101 valóban prímszám.

Ha p, q és r felcserélhetőségétől eltekintünk, akkor az egyetlen megoldás $p = 3$, $q = 5$ és $r = 101$.