Bolyai János

Matematikai Társulat

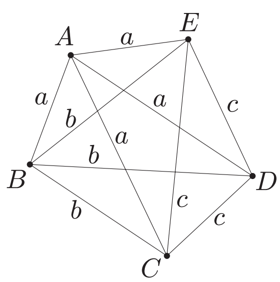
Oktatási és Kulturális Minisztérium
Támogatáskezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2009/2010-es tanév
2. (döntő) forduló
haladók III. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Egy kör kerületén adott n darab pont ($n \geqq 3$). Bármely két pontot összekötő szakaszt ki kell színezni valamilyen (de egyféle) színűre. Legalább hány színre van szükség, ha a közös végpont nélküli szakaszok színe nem lehet azonos?

Megoldás.



Ha $f(n)$-nel jelöljük a minimálisan felhasznált színek számát, akkor nyilvánvaló, hogy $f(3) = 1$ és $f(4) = 2$.

$n = 5$ esetén ábránk alapján megfelelő színezés például az, ha AB, AC, AD, AE „a” színű, BC, BD, BE „b” színű és CD, CE, DE „c” színű. 1 pont

Próbálkozásaink alapján sejthető, hogy a minimálisan felhasználható színek $f(n)$ száma $n - 2$. 1 pont

Először azt látjuk be, hogy $n - 2$ darab szín használata elegendő a színezéshez. Ehhez megadunk egy megfelelő konstrukciót. Az n darab pontot $1, 2, 3, \ldots, n$-nel jelölve az $(i; j)$ pontpárok megfelelő színezését adjuk meg, ahol $1 \leqq i < j \leqq n$.

Megfelelő színezés például:

$$\begin{array}{lll}
(1;2),\ (1;3),\ \ldots, & (1;n) & \longrightarrow \text{első szín} \\
(2;3),\ (2;4),\ \ldots, & (2;n) & \longrightarrow \text{második szín} \\
\ \vdots & & \\
(n-3;n-2),\ (n-3;n-1), & (n-3;n) & \longrightarrow (n-3)\text{-adik szín} \\
(n-2;n-1),\ (n-2;n), & (n-1;n) & \longrightarrow (n-2)\text{-edik szín,}
\end{array}$$

hiszen az utolsó három pontpár által meghatározott szakaszoknak van közös pontja.

A konstrukció alapján látható, hogy $f(n) \leqq n - 2$. 2 pont

Legyen a továbbiakban $n \geqq 5$.

Ha a legtöbbször használt szín egyike például a piros, akkor belátjuk, hogy $f(n) \leqq n - 2$ esetén a piros színű szakaszok száma legalább 4.

Ha ugyanis a legtöbbször felhasznált szín (színek) száma legfeljebb 3, akkor legfeljebb $3 \cdot f(n) \leqq 3 \cdot (n-2) = 3n-6$ szakaszt színeztünk, így pedig

$$3n - 6 \geqq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2},$$

azaz $0 \geqq n^2 - 7n + 12 = (n-3)(n-4)$ teljesülne. Ez pedig lehetetlen, hiszen $n \geqq 5$.

A következő lépésben azt igazoljuk, hogy a legtöbbször felhasznált színű (esetünkben a piros) szakaszok nem „alkothatnak” háromszöget, amennyiben $f(n) \leqq n-2$.

Különben nyilvánvalóan nem lehetne még egy piros színű szakaszt berajzolni, hiszen a háromszögnek legalább az egyik oldalával lenne közös csúcsa, így nem lehetnének azonos színűek. 1 pont

Állításunkból következik, hogy a legtöbb azonos színű szakasz – esetünkben a piros színűek – egy pontból indulhatnak csak ki, hiszen a számuk legalább 4. 1 pont

Végezetül belátjuk, hogy $f(n) = n-2$.

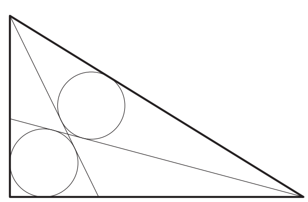
Ha ugyanis k lenne az a minimális csúcsú gráf, amelyre először teljesülne, hogy $f(k) < k-2$, akkor $f(3)=1$, $f(4)=2$, $f(5)=3$, $\ldots$, $f(k-1)=k-3$ esetén hagyjuk el a k csúcsú gráfból azt a pontot, amelyből a legtöbb azonos színű (piros színű) indul ki. Ekkor egy olyan $k-1$ pontú gráfot kapunk, amelynek egyik éle sem piros az előzőekben bizonyítottak alapján.

Mivel $f(k-1)=k-3$, ezért $f(k)=k-3+1=k-2$, hiszen $f(k-1)$-hez hozzá kell adni még 1-et (piros szín).

Az ellentmondás pedig eredeti állításunkat igazolja. 1 pont

Összesen: 7 pont

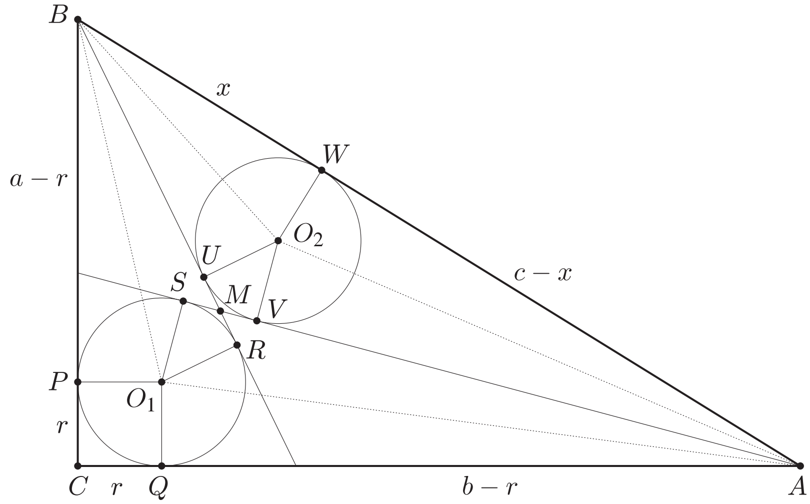
2. Egy derékszögű háromszöget úgy bontottunk fel az ábrán látható módon négy részre, hogy a négyszög alakú részbe kör írható, aminek sugara megegyezik a háromszög alakú részbe írt kör sugarával.



Fejezzük ki a körök sugarát a háromszög oldalaival!

1. megoldás. A háromszöget részekre bontjuk, majd területét felírjuk a részek területének összegeként. Ebből az egyenletből fogjuk megkapni a keresett kifejezést.

A következő ábrán megjelöltük a körök érintési pontjait, és berajzoltuk a körök középpontját meghatározó szögfelezőket. Az érintőszakaszok egyenlősége és a sugarak egyenlősége alapján $PCQO_1$ négyzet, AQO_1S, $VAWO_2$, $WBUO_2$ és $RBPO_1$ pedig derékszögű deltoidok.



Az egybevágó körök sugara r, a befogók $AC = b$ és $BC = a$, végül az átfogó $AB = c$.

Tekintsük a következő összeget:

$$T_{PCQO_1} + T_{QASO_1} + T_{BPO_1R} + T_{BWO_2U} + T_{AWO_2V}.$$

Azt állítjuk, hogy a fenti összeg éppen az ABC háromszög területét adja. 2 pont

Ehhez csak annyit kell megmutatnunk, hogy $T_{O_1RMS} = T_{MVO_2U}$, hiszen előbbi kétszer, utóbbi pedig egyszer sem szerepel az összegben, a háromszög többi részét pedig egyrétűen fedik le az összegben szereplő sokszögek.

A $T_{O_1RMS} = T_{MVO_2U}$ egyenlőség következik abból, hogy az O_1RMS és MVO_2U deltoidok egybevágók, hiszen mindkettőnek van két szemközti derékszöge, M-nél fekvő szögeik egyenlők, továbbá $O_1S = O_1R = O_2U = O_2V = r$. 2 pont

Most már csak egy kis algebra van hátra:

$$T_{ABC} = \frac{ab}{2} = T_{PCQO_1} + T_{QASO_1} + T_{BPO_1R} + T_{BWO_2U} + T_{AWO_2V} =$$
$$= r^2 + r(b-r) + r(a-r) + rx + r(c-x) = r^2 + r(b-r) + r(a-r) + rc =$$
$$= r(a+b+c) - r^2.$$

Egy másodfokú egyenletet kaptunk r-re:

$$\frac{ab}{2} = r(a+b+c) - r^2.$$ 1 pont

Nullára rendezve és megoldva:

$$r_{1,2} = \frac{a+b+c \pm \sqrt{(a+b+c)^2 - 2ab}}{2}.$$ 1 pont

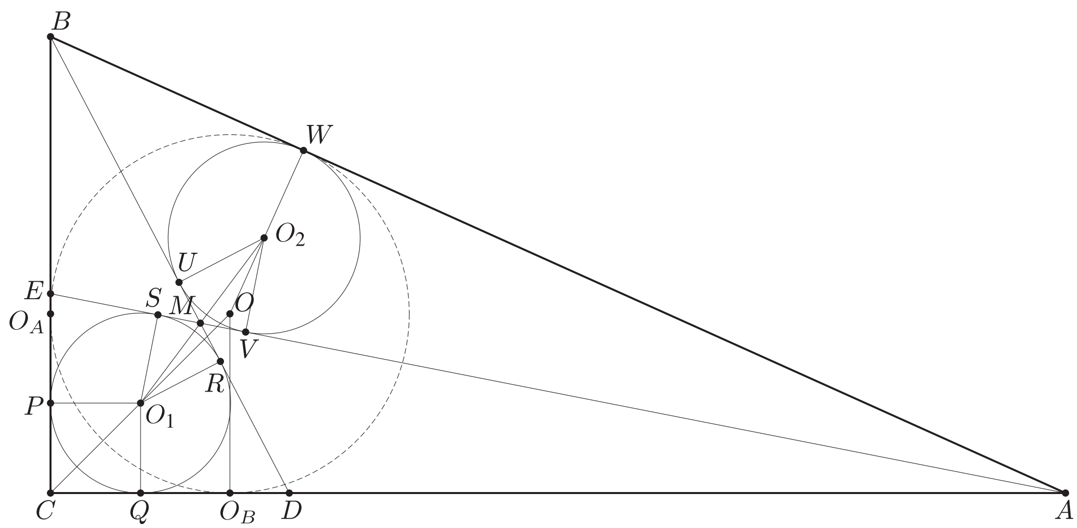
Nyilván $r < a$, $r < b$ ezért $r < \dfrac{a+b+c}{2}$, tehát a két gyök közül a kisebb a megfelelő:

$$r = \frac{a+b+c-\sqrt{(a+b+c)^2 - 2ab}}{2}.$$ 1 pont

Összesen: 7 pont

2. megoldás. Az előző megoldás legfontosabb ötlete a két egybevágó deltoid területének kiejtése volt. A most következő – Bohner Gézától származó – megoldás több eszközt használ, de cserébe további geometriai tulajdonságokat ismerünk meg a feladatban szereplő elrendezésről.

Az előzőhöz hasonló ábrát használunk, néhány további pont megjelölésével:



A szaggatott kör az ABC beírt köre, sugara ϱ, érintési pontjai a befogókon O_A és O_B, középpontja O.

1. észrevétel: Az $ABC\triangle$ beírt köre ugyanott érinti az átfogót, mint az $ABM\triangle$ beírt köre, W-ben. Ez látható abból, hogy az érintőszakaszok egyenlősége alapján: $BW = BU$, $BR = BP = a - r$, $AW = AV$, $AS = AQ = b - r$. A kis körök egybevágósága miatt $UR = SV = d$, ezért $BW = BU = BR - d = BP - d = a - r - d$ és $AW = AV = AS - d = AQ - d = b - r - d$. Innen $AW - BW = (b - r - d) - (a - r - d) = b - a$. Mivel az is igaz, hogy $AW + BW = c$, $AW = ((b - a) + c)/2$, tehát W valóban az $ABC\triangle$ beírt körének átfogón fekvő érintési pontja.

2. észrevétel: Az előzőeket kicsit tovább fűzve $AW = AO_B = b - \varrho$ és $AW = AV = AS - d = AQ - d = b - r - d$ alapján $\varrho = r + d$, vagyis a kis körök közös belső érintőszakaszának hossza $d = \varrho - r$. Az is kiderült, hogy QO_B és PO_A hossza is d.

3. észrevétel: Az SV, UR és O_1O_2 szakaszok közös felezőpontja M, az AE és BD szakaszok metszéspontja.

4. észrevétel: $O_2OO_1\sphericalangle = 135^\circ + \alpha$. Ez annak következménye, hogy O és O_1 rajta vannak a C-nél lévő derékszög belső szögfelezőjén, továbbá O_2 és O rajta vannak az átfogóra W-ben állított merőlegesen. Itt fontos az elrendezés, OO_1O_2 állása, fel kell tennünk, hogy $b > a$. Ilyen esetben $\alpha < 45^\circ$.

Ennyi előkészület után nekiállunk a bizonyításnak: az O_1M szakaszt számítjuk ki kétféle módon, az O_2OO_1 és az O_1SM háromszögekből.

I. O_2OO_1 háromszög: a koszinusztételt fogjuk használni. Az oldalak $OO_2 = \varrho - r$, $OO_1 = \sqrt{2} \cdot QO_B = \sqrt{2} \cdot (\varrho - r)$. A koszinusz:

$$\cos(135^\circ + \alpha) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\cos\alpha + \sin\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a+b}{c}.$$

Most már jöhet a koszinusztétel:

$$4 \cdot O_1M^2 = O_1O_2^2 = (\varrho - r)^2 + \left(\sqrt{2}(\varrho - r)\right)^2 - 2 \cdot (\varrho - r) \cdot \sqrt{2} \cdot (\varrho - r) \cdot -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a+b}{c} =$$

$$= (\varrho - r)^2 \cdot \frac{3c + 2a + 2b}{c}.$$

II. O_1SM háromszög, Pitagorasz-tétel:

$$4 \cdot O_1M^2 = 4 \cdot r^2 + (\varrho - r)^2.$$

A baloldalak egyenlősége miatt ezt kaptuk:

$$(\varrho - r)^2 \cdot \frac{3c + 2a + 2b}{c} = 4 \cdot r^2 + (\varrho - r)^2.$$

Rendezve:

$$(\varrho - r)^2 \cdot \frac{2c + 2a + 2b}{c} = 4 \cdot r^2,$$

$$(\varrho - r)^2 \cdot \frac{c + a + b}{2c} = r^2,$$

$$(\varrho - r) \cdot \sqrt{\frac{c + a + b}{2c}} = r.$$

Végül a terület kétféle felírásából $\varrho = \dfrac{ab}{a+b+c}$, ezt az előző egyenletbe írva és rendezve:

$$\frac{ab}{a+b+c} \cdot \sqrt{\frac{a+b+c}{2c}} = r \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{a+b+c}{2c}}\right),$$

$$r = \frac{\dfrac{ab}{a+b+c} \cdot \sqrt{\dfrac{a+b+c}{2c}}}{1 + \sqrt{\dfrac{a+b+c}{2c}}}.$$

Zárásként megmutatjuk azt a ránézésre koránt sem triviális tényt, hogy a most kapott eredmény egyezik az első megoldás végeredményével. Bevezetjük a $K = a + b + c$ jelölést.

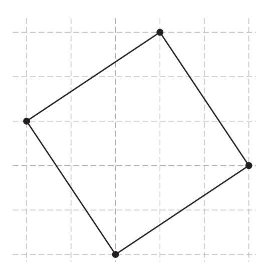
$$\begin{aligned}
\frac{\frac{ab}{K}\cdot\sqrt{\frac{K}{2c}}}{1+\sqrt{\frac{K}{2c}}} \quad &?= \quad \frac{K-\sqrt{K^2-2ab}}{2} = \frac{ab}{K+\sqrt{K^2-2ab}}\,,\\
\frac{\frac{1}{K}\cdot\sqrt{\frac{K}{2c}}}{1+\sqrt{\frac{K}{2c}}} \quad &?= \quad \frac{1}{K+\sqrt{K^2-2ab}}\,,\\
\sqrt{\frac{1}{2cK}}\cdot\left(K+\sqrt{K^2-2ab}\right) \quad &?= \quad 1+\sqrt{\frac{K}{2c}}\,,\\
\sqrt{\frac{K}{2c}}+\sqrt{\frac{K^2-2ab}{2cK}} \quad &?= \quad 1+\sqrt{\frac{K}{2c}}\,,\\
\sqrt{\frac{K^2-2ab}{2cK}} \quad &?= \quad 1,\\
\frac{K^2-2ab}{2cK} \quad &?= \quad 1,\\
K^2-2ab \quad &?= \quad 2cK,\\
K(K-2c) \quad &?= \quad 2ab,\\
(a+b+c)(a+b-c) = (a+b)^2-c^2 \quad &= \\
= a^2+b^2+2ab-c^2 \quad &= \quad 2ab.
\end{aligned}$$

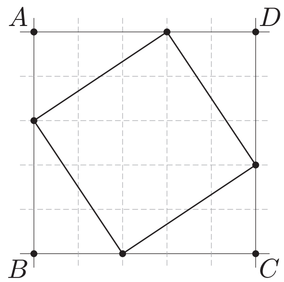
Pitagorasz tétele alapján azonosságot kaptunk, befejeztük a bizonyítást.

3. Tekintsük a koordinátarendszerben a $(0;0)$, $(0;n)$, $(n;0)$, és az $(n;n)$ (n: pozitív egész) csúcspontok által meghatározott négyzetet. Hány olyan négyzet van, amelynek mind a négy csúcspontja a fenti négyzet belső, vagy határon lévő $(n+1)^2$ darab rácspontja közül való? (Rácspont: mindkét koordinátája egész.)

Megoldás.

A gond az, hogy nem csak a koordinátatengelyekkel párhuzamos oldalú négyzetek vannak (lásd ábra).





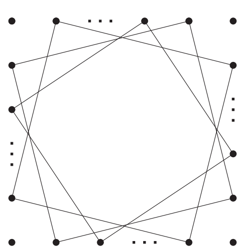
Az ilyen négyzeteket megszámolandó csináljuk a következőt! Húzzunk a négyzet „alsó és felső” csúcspontján át vízszintes egyenest, míg a „bal- és jobboldali” csúcspontokon át függőleges egyeneseket! Így az eredeti négyzetünket egy $ABCD$ négyszögbe foglaltuk.

$ABCD$ téglalap, mivel minden szöge derékszög.

Valamint, mivel az eredeti négyzetet $ABCD$-vé kiegészítő négy kis derékszögű háromszög egybevágó (szögeik és átfogóik azonosak), emiatt $ABCD$ minden oldala azonos hosszú, és így $ABCD$ egy négyzet.

Vagyis minden a koordinátatengelyekkel nem párhuzamos oldalú négyzet egyértelműen belefoglalható egy a koordinátatengelyekkel párhuzamos oldalú négyzetbe. 2 pont

Innentől a következőt csináljuk. Megszámoljuk, hogy egy adott k oldalhosszú, a koordinátatengelyekkel párhuzamos oldalú négyzetbe (a fenti módon; vagyis úgy, hogy a kisebb négyzet minden csúcsa a nagyobb négyzet oldalain legyen) hány kisebb négyzet rajzolható. Majd megszámoljuk, hogy hány a koordinátatengelyekkel párhuzamos oldalú $1, 2, \ldots$ oldalhosszú négyzet van, és mindegyik esetben az ilyen négyzetek számát megszorozzuk az előző pontban (hány kisebb négyzet is rajzolható bele?) kapott szám $+\ 1$-gyel (hogy a tengelyekkel párhuzamos oldalú négyzet se maradjon ki).



Lássuk! Vegyünk egy olyan a koordinátatengelyekkel párhuzamos oldalú rácsnégyzetet, melynek oldalhossza k! (Így mind a négy oldal külön-külön $k + 1$ rácspontot tartalmaz. Lásd ábra!)

Az ábra alapján látható, hogy tetszőleges oldal tetszőleges rácspontját kiszemelve pontosan egyetlen olyan négyzet rajzolható, melynek minden csúcsa a nagy (tengelyekkel párhuzamos oldalú) négyzet oldalán van. Mivel egy oldal $k + 1$ rácspontot tartalmaz, de ezek közül kettő a négyzet csúcspontja, ezért $k + 1 - 2 = k - 1$ db olyan kis négyzet van, melyeknek a nagy négyzet a „köréírható” négyzete. Ha ehhez hozzávesszük magát a nagy négyzetet, akkor azt kapjuk, hogy minden a koordinátatengelyekkel párhuzamos oldalú k oldalhosszú rácsnégyzet pontosan k darab négyzetet határoz meg úgy, hogy a k darab négyzet mindegyikének a „nagy” négyzet a „köréírható” négyzete. 2 pont

(És ez a „meghatározás” egyértelmű; minden négyzetnek pontosan egy a tengelyekkel párhuzamos oldalú köréírható négyzete van.)

Hány olyan k oldalhosszú négyzet van, melynek oldalai a tengelyekkel párhuzamosak?

A $(0; 0)$, $(0; n)$, $(n; 0)$, és az $(n; n)$ négyzetben lévő rácspontok közül választjuk minden csúcsot. Tüntessük ki a $k \times k$-as négyzetek bal felső csúcspontjait, és számoljuk meg, hogy ez hova eshet, ha azt akarjuk, hogy a négyzetünk minden csúcsa „jó legyen”.

Ha $k = 1$, akkor a lehetséges bal felső csúcspontok a $(0; 0)$, $(0; n - 1)$, $(n - 1; 0)$, $(n - 1; n - 1)$ négyzet által meghatározott (összesen n^2) pontok. Vagyis n^2 darab egységnégyzetünk van.

$\vdots$

Ha k tetszőleges ($k \leqq n$), akkor a lehetséges bal felső csúcspontok a $(0;0)$, $(0;n-k)$, $(n-k;0)$, $(n-k;n-k)$ négyzet által meghatározott (összesen $(n-k+1)^2$) pontok, vagyis ekkor $(n-k+1)^2$ darab k oldalhosszú négyzet van, melynek oldalai a tengelyekkel párhuzamosak.

(Megjegyzés: Ha valaki csak az ilyen négyzeteket összegzi, és a végeredménye 1^2+2^2+ $+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, az is kapjon 1 pontot!)

A fentiek alapján így az összes négyzet száma (S-sel jelölöm a továbbiakban):

$$S = n\cdot 1^2+(n-1)\cdot 2^2+(n-2)\cdot 3^2+\ldots+2\cdot(n-1)^2+1\cdot n^2,$$ 1 pont

$$S = \left(1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2+n^2\right)+\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2\right)+\ldots+$$
$$+(1^2+2^2)+(1^2),$$

$$S=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+\ldots+\frac{2\cdot 3\cdot 5}{6}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{6},$$

$$S=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}+\frac{2(n-1)^3+3(n-1)^2+(n-1)}{6}+\ldots+\frac{2\cdot 1^3+3\cdot 1^2+1}{6},$$

$$S=\frac{2\left(n^3+(n-1)^3+\ldots+1^3\right)}{6}+\frac{3\left(n^2+(n-1)^2+\ldots+1^2\right)}{6}+\frac{n+(n-1)+\ldots 1}{6},$$ 1 pont

$$S=\frac{\left(n(n+1)\right)^2}{12}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}+\frac{n(n+1)}{12}=\frac{n(n+1)(n^2+n+2n+1+1)}{12}=$$
$$=\frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}.$$

(Ha az utolsó sor bármelyik képletéhez eljut, kapja meg az utolsó pontot! Ez már zárt alak.) 1 pont

Vagyis összesen $S=\dfrac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$ olyan négyzet van, amelynek mind a négy csúcspontja az $(n+1)^2$ darab rácspont közül való. És ezt akartuk megtudni.

Összesen: 7 pont