Bolyai János
Matematikai Társulat

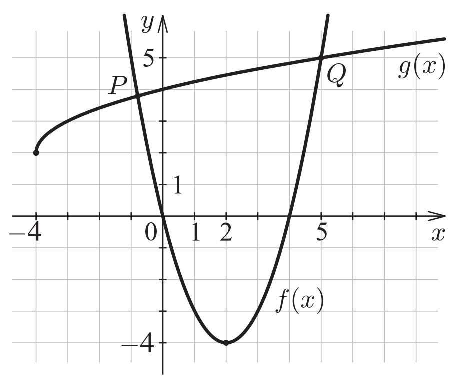
Oktatásért Közalapítvány
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2010/2011-es tanév
2. (döntő) forduló
haladók III. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Bizonyítsuk be, hogy a koordinátarendszer kezdőpontja, valamint a valós számok lehető legbővebb halmazán értelmezett $f(x) = x^2 - 4x$ és $g(x) = 2 + \sqrt{x+4}$ függvények grafikonjának metszéspontjai olyan konvex sokszöget határoznak meg, melynek egyik szöge derékszög.

1. megoldás. $f(x)$ értelmezési tartománya $\mathbb{R}$, $g(x)$ értelmezési tartománya $[-4; +\infty[$. A két függvény grafikonjának vázlata a következő:



Az ábráról leolvasható, vagy próbálkozással adódik, hogy $Q(5; 5)$. Valóban igaz, hogy $5^2 - 4 \cdot 5 = 2 + \sqrt{5+4}$. 1 pont

Ha $f(x) = g(x)$, akkor ábránk szerint két megoldás van.

A feladat feltételei alapján

$$(*) \qquad x^4 - 4x - 2 = \sqrt{x+4}\,.$$

Négyzetre emeléssel rendezés után az $x\big(x^3 - 8x^2 + 12x + 15\big) = 0$ egyenlet adódik. 1 pont

$(*)$ egyenletünknek $x = 0$ nem gyöke, viszont $x = 5$ igen, ezért az $x^3 - 8x^2 + 12x + 15 = 0$ egyenlet alapján

$$0 = \big(x^3 - 5x^2\big) - \big(3x^2 - 15x\big) - 3(x-5) = (x-5)\big(x^2 - 3x - 3\big).$$

A kapott egyenlet gyökei $x_1 = 5$, $x_2 = \dfrac{3-\sqrt{21}}{2}$, $x_3 = \dfrac{3+\sqrt{21}}{2}$, ahol x_3 nem felel meg a feladat feltételeinek. 1 pont

A gyökök és az ábra alapján a kapott sokszög az $O(0;0)$, $Q(5;5)$, $P\left(\dfrac{3-\sqrt{21}}{2};\dfrac{3+\sqrt{21}}{2}\right)$ csúcsú háromszög. 2 pont

Az O, P, Q pontok koordinátái alapján $OP^2=15$, $PQ^2=35$ és $OQ^2=50$ adódik. 1 pont

Pitagorasz tételének megfordítása alapján az $OPQ\sphericalangle$ derékszög, hiszen

$$OP^2+PQ^2=OQ^2.$$ 1 pont

Összesen: 7 pont

2. megoldás (vázlat). A Q pont koordinátái $(5;5)$. 1 pont

Ha a P pont első koordinátája x_0, akkor $p\big(x_0;x_0^2-4x_0\big)$, ahol $x_0^2-4x_0=2+\sqrt{x_0+4}$. 1 pont

Ekkor $OQ^2=50$, $OP^2=x_0^2+\big(x_0^2-4x_0\big)^2$ és $PQ^2=(x_0-5)^2+\Big(\big(x_0^2-4x_0\big)-5\Big)^2$.

$$\begin{aligned}OP^2+PQ^2&=2\big(x_0^2-4x_0\big)^2+x_0^2+(x_0-5)^2-10\big(x_0^2-4x_0\big)+25=\\&=2\big(2+\sqrt{x_0+4}\big)^2-8x_0^2+30x_0+50=\\&=8+8\sqrt{x_0+4}+2x_0+8-8x_0^2+30x_0+50=\\&=-8x_0^2+32x_0+66+8\sqrt{x_0+4}\,.\end{aligned}$$ 2 pont

Mivel $x_0^2-4x_0=2+\sqrt{x_0+4}$ alapján $8\sqrt{x_0+4}=8x_0^2-32x_0-16$, ezért

$$-8x_0^2+32x_0+66+8\sqrt{x_0+4}=50.$$ 2 pont

Tehát $OP^2+PQ^2=OQ^2$, ezért Pitagorasz tételének megfordítása alapján az OPQ háromszög derékszögű. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. megoldás (*Nemkin Viktória dolgozata alapján*). Az első megoldásból felhasználjuk, hogy $Q(5;5)$ a grafikonok metszéspontja, és azt szeretnénk bizonyítani, hogy $QPO\sphericalangle$ derékszög. Ezt P koordinátáinak meghatározása nélkül fogjuk igazolni.

Jelölje P koordinátáit x_0 és y_0.

P rajta van $f(x)$ grafikonján, ezért

$$(*)\qquad y_0=x_0^2-4x_0.$$

P a $g(x)$ grafikonjának is pontja, így $y_0=2+\sqrt{x_0+4}$. Ez utóbbi egyenletet átrendezve: $(y_0-2)^2=x_0+4$, vagyis

$$(**)\qquad x_0=y_0^2-4y_0.$$

A $(*)$ és $(**)$ egyenlőségeket összeadva $x_0 + y_0 = x_0^2 + y_0^2 - 4x_0 - 4y_0$. Ez az összefüggés átalakítható a következő alakra:

$$\left(x_0 - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y_0 - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{2} = \left(\frac{OQ}{2}\right)^2.$$

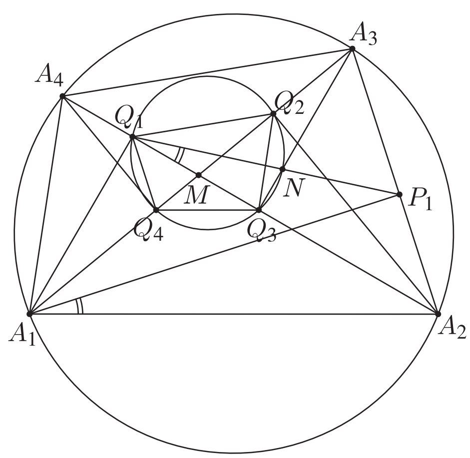
Ez azt jelenti, hogy P az OQ átmérőjű kör pontja, tehát a Thalesz-tételre hivatkozva kapjuk, hogy $QPO\sphericalangle = 90°$.

2. Az $A_1A_2A_3A_4$ húrnégyszögben bevezetjük a ciklikus indexelést: A_i és A_{i+4} jelentse ugyanazt a csúcsot. Az A_i pont merőleges vetülete az $A_{i+1}A_{i+2}$ egyenesen legyen P_i, az $A_{i+1}A_{i+3}$ egyenesen pedig Q_i. Bizonyítsuk be, hogy a P_iQ_i egyenesek $(i = 1, 2, 3, 4)$ egy ponton mennek át.

1. megoldás. Ha a húrnégyszög átlói merőlegesek, akkor a Q_i pontok egybeesnek, így az állítás triviális. A továbbiakban kizárjuk ezt az esetet.

A bizonyítás két részből áll: először megmutatjuk, hogy $Q_1Q_2Q_3Q_4$ húrnégyszög, majd bebizonyítjuk, hogy a P_iQ_i egyenesek átmérő egyenesei az előbbi húrnégyszög köréírt körének. 1 pont

A megoldás során többször fogunk szögek egyenlőségére és a kerületi szögek tételére hivatkozni. Ahhoz, hogy a hivatkozások helytállóak legyenek, szükséges az ábra diszkussziója, a lehetséges elrendezések vizsgálata. A következőkben arra az esetre adunk ábrát, amikor a húrnégyszöget két átlója két tompaszögű és két hegyesszögű háromszögre vágja. Ha nem ez a helyzet, akkor az indoklást módosítani kell, de a gondolatmenet lényege nem változik.



Az ábra jelöléseit használjuk. (M az átlók metszéspontja, N pedig Q_1P_1 és Q_3A_3 metszéspontja.)

A kerületi szögek tétele miatt A_1MA_4 és A_2MA_3 hasonló háromszögek. A_1 és A_2 megfelelő csúcsok, így a belőlük induló magasságok azonos arányban osztják a szemközti oldalt, vagyis $MQ_1/MA_4 = MQ_2/MA_3$. Most a párhuzamos szelők tételének megfordítását használva következik, hogy $Q_1Q_2 \parallel A_4A_3$. 1 pont

Hasonlóan $Q_4Q_3 \parallel A_1A_2$. Tehát $Q_1Q_2Q_4\sphericalangle = A_4A_3A_1\sphericalangle$ és $Q_1Q_3Q_4\sphericalangle = A_4A_2A_1\sphericalangle$. Mivel az A_i pontok egy körön vannak, ezért $A_4A_3A_1\sphericalangle = A_4A_2A_1\sphericalangle$. Az egyenlőségek alapján $Q_1Q_2Q_4\sphericalangle = Q_1Q_3Q_4\sphericalangle$ is igaz, vagyis ismét a kerületi szögek tételére hivatkozva $Q_1Q_2Q_3Q_4$ húrnégyszög. 2 pont

Most megmutatjuk, hogy N rajta van a Q_i pontok által meghatározott körön. Ebből már következik a feladat állítása, hiszen ekkor $Q_1Q_3A_3 = 90°$ miatt Q_1N átmérő, Thalesz tételére hivatkozva. 1 pont

Szintén Thalesz tétele alapján $A_1Q_1P_1A_2$ húrnégyszög, mert $A_1Q_1A_2\sphericalangle$ és $A_1P_1A_2\sphericalangle$ derékszög. Innen $A_2A_1P_1\sphericalangle = A_2Q_1P_1\sphericalangle = Q_3Q_1N\sphericalangle$ következik. Ezt a szöget az ábrán két ívvel jelöltük, most nevezzük el α-nak. $A_1A_2P_1$-ben $A_1A_2P_1\sphericalangle = 90^\circ - \alpha$, tehát $Q_1NQ_3\sphericalangle$ is ennyi. Elegendő tehát megmutatnunk, hogy $Q_1Q_2Q_3\sphericalangle$ is egyenlő $A_1A_2P_1\sphericalangle$-gel, mert ebből már következik, hogy N rajta van az említett körön. 1 pont

Ez az utolsó szög-egyenlőség belátható például az alábbi módon:

$$A_1A_2P_1\sphericalangle = A_1A_2A_4\sphericalangle + A_4A_2A_3\sphericalangle.$$

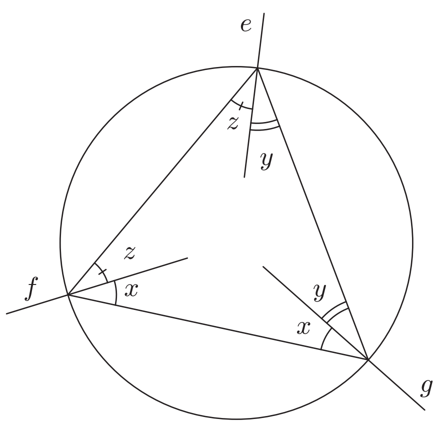
Az összeg első tagjáról korábban beláttuk, hogy $A_1A_2A_4\sphericalangle = Q_1Q_2Q_4\sphericalangle$. A második tagra pedig $A_4A_2A_3\sphericalangle = Q_4Q_2Q_3\sphericalangle$, mert $A_2Q_3Q_2A_3$ is húrnégyszög, így egyik szöge a szemközti szög külső szögével egyezik meg.

A most kapott egyenlőségek alapján következik, hogy N rajta van a Q_i pontokra illeszkedő körön, tehát P_1Q_1 átmérő. A másik három egyenesről hasonlóan igazolható, hogy átmennek az említett kör középpontján. 1 pont

Összesen: 7 pont

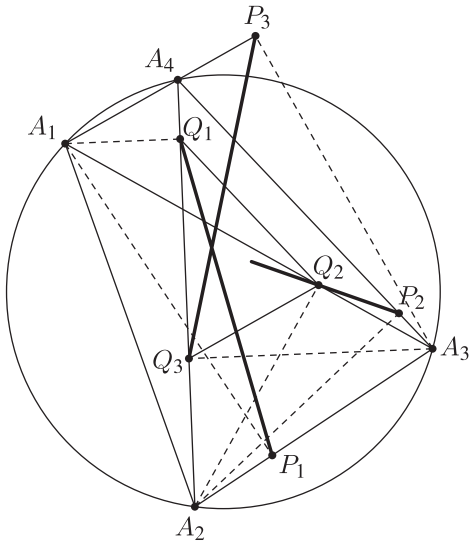
2. megoldás (*Medek Ákos dolgozata alapján*). A Q_i pontok közül kiválasztunk tetszőleges hármat, legyenek ezek mondjuk Q_1, Q_2 és Q_3. Azt fogjuk igazolni, hogy P_1Q_1, P_2Q_2 és P_3Q_3 átmennek a $Q_1Q_2Q_3$ háromszög köréírt körének középpontján. Ebből következik a feladat állítása, továbbá az is, hogy $Q_1Q_2Q_3Q_4$ húrnégyszög.

A gondolatmenet lényege a következő észrevétel:



Egy háromszög csúcsain áthaladó e, f és g egyenesekre teljesül, hogy az ábrán azonosan jelölt szögek egyenlők. Ekkora a három egyenes átmegy a háromszög köréírt körének középpontján.

Bizonyítás: az $x + y = \alpha$, $y + z = \beta$, $z + x = \gamma$ egyenletrendszernek egyetlen megoldása van. Ha azokat az e', f' és g' egyeneseket tekintjük, amelyek a köréírt középpontját a csúcsokkal kötik össze, és x'-vel, y'-vel, z'-vel jelöljük, hogyan osztották fel ezek a „vesszős” egyenesek a háromszög szögeit, akkor x', y' és z' ugyanannak az egyenletrendszernek tesz eleget, mint x, y és z.



A most következő számításokban intenzíven használjuk az ábrán fellelhető húrnégyszögeket, továbbá a kerületi szögek tételét.

Bevezetjük az A_i-nél fekvő belső szögre az α_i jelölést. A három szögpár egyenlősége közül kettőt bizonyítunk, a harmadik hasonlóan végezhető.

1. $A_4P_3A_3Q_3$ húrnégyszögben:

$$A_4Q_3P_3\sphericalangle = A_4A_3P_3\sphericalangle = 90^\circ - P_3A_4A_3\sphericalangle = \\ = \alpha_4 - 90^\circ.$$

$P_1Q_1A_1A_2$ húrnégyszögben:

$$P_1Q_1A_2\sphericalangle = P_1A_1A_2\sphericalangle = 90^\circ - \alpha_2.$$

Végül $A_4Q_3P_3\sphericalangle = P_1Q_1A_2\sphericalangle \Leftrightarrow \alpha_4 - 90^\circ = 90^\circ - \alpha_2 \Leftrightarrow 180^\circ = \alpha_2 + \alpha_4$, ami húrnégyszögben teljesül.

2. A Q_3Q_2 oldalra illeszkedő szögek egyenlősége helyett azt fogjuk igazolni, hogy

$$P_3Q_3Q_2\sphericalangle + Q_3Q_2P_2\sphericalangle = 180^\circ.$$

$$\begin{aligned} P_3Q_3Q_2\sphericalangle &= A_3Q_3P_3\sphericalangle - A_3Q_3Q_2\sphericalangle = A_3A_4P_3\sphericalangle - A_3A_2Q_2\sphericalangle = \\ &= 180^\circ - \alpha_4 - (90^\circ - A_1A_3A_4\sphericalangle) = 90^\circ - \alpha_4 + A_1A_3A_2\sphericalangle, \\ Q_3Q_2P_2\sphericalangle &= Q_3Q_2A_3\sphericalangle + A_3Q_2P_2\sphericalangle = 180^\circ - A_3A_2A_4\sphericalangle + A_3A_2P_2\sphericalangle = \\ &= 180^\circ - A_3A_2A_4\sphericalangle + 90^\circ - \alpha_3 = 270^\circ - A_3A_2A_4\sphericalangle - \alpha_3. \end{aligned}$$

Végül az összeg:

$$\begin{aligned} &P_3Q_3Q_2\sphericalangle + Q_3Q_2P_2\sphericalangle = 90^\circ - \alpha_4 + A_1A_3A_2\sphericalangle + 270^\circ - A_3A_2A_4\sphericalangle - \alpha_3 = \\ &= 360^\circ - \alpha_3 - \alpha_4 - A_3A_2A_4\sphericalangle + A_1A_3A_2\sphericalangle = \alpha_1 + \alpha_2 - A_3A_2A_4\sphericalangle + A_1A_3A_2\sphericalangle = \\ &= \alpha_1 + A_1A_2A_4\sphericalangle + A_1A_3A_2\sphericalangle = \alpha_1 + A_1A_2A_4\sphericalangle + A_1A_4A_2\sphericalangle. \end{aligned}$$

Látható, hogy az $A_1A_2A_4$ háromszög belső szögeinek összegét kaptuk meg, ami valóban 180°.

3. megoldás (*Janzer Olivér dolgozata alapján*). Erősebb eszközök segítségével rövid és elegáns bizonyítás adható. Három lemmát használunk:

1. Az ABC háromszög síkjában fekvő P pontnak a háromszög oldalegyenesein vett merőleges vetületei akkor és csak akkor esnek egy egyenesre, ha P a háromszög köréírt körére esik.
2. Ha P az ABC háromszög köréírt körének pontja, akkor a P pontot az oldalegyenesekre tükrözve a tükörképek egy a magasságponton átmenő egyenesre illeszkednek.

3. Ha egy háromszög köréírt körének középpontját választjuk origónak, akkor a csúcsok helyvektorait összegezve a magasságpontba mutató vektort kapunk.

Legyenek az A_1, A_2, A_3 A_4 pontok helyvektorai $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ és $\underline{d}$. A P_1Q_1 egyenest A_1-ből kétszeresére nagyítva az $A_2A_3A_4$ magasságpontján átmenő egyenest kapunk. Tehát P_1Q_1 átmegy az A_1 pontot az $A_2A_3A_4$ magasságpontjával összekötő szakasz felezőpontján. Ennek helyvektora:

$$\frac{1}{2}\underline{a}+\frac{1}{2}(\underline{b}+\underline{c}+\underline{d})=\frac{\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}+\underline{d}}{2}.$$

Látható, hogy a kapott pont nem függ attól, hogy melyik A_i csúcsból indulunk ki.

3. A Zenekedvelők Végtelen Kollégiumában egyetlen – mindkét irányban végtelen hosszú – folyosón vannak a lakószobák, egészekkel sorszámozva. Lehetnek üres szobák, és egy szobában többen is lakhatnak. Minden szobában áll egy hatalmas zongora, amin a lakók szeretnek játszani. Ha azonban két szomszéd (a k. és a $(k+1)$. szobában) gyakorol a zongorán, az kellemetlen zenei élményhez vezet, ezért egy szobával arrébb költöznek. Ez minden nap a következő módon történik: ha vannak szomszédok, akkor kiválasztunk egy-egy szomszédos lakót (a k. és a $(k+1)$. szobában), és egyikőjük a $(k-1)$., a másik pedig a $(k+2)$. szobába költözik.

Bizonyítsuk be, hogy ha a kollégiumnak véges sok lakója van, akkor véges sok nap után abbamarad a költözködés.

Megoldás. A lakók pillanatnyi elhelyezkedését egy függvénnyel fogjuk jellemezni. Minden lakóhoz hozzárendeljük szobája sorszámának négyzetét, majd ezeket a számokat összegezzük az összes lakóra. Megmutatjuk, hogy az így kapott állapotfüggvény minden költözéskor növekszik. 2 pont

Ez egyszerű számolással megmutatható:

$$k^2+(k+1)^2=2k^2+2k+1<(k-1)^2+(k+2)^2=2k^2+2k+5.$$

Az állapotfüggvény növekedéséből következik, hogy nem ismétlődhet a lakók egyetlen elrendezése sem, tehát a költözködések csak úgy ismétlődhetnének a végtelenségig, ha a kezdetben elfoglalt szobákhoz képest tetszőlegesen messzire eljutnának lakók. 2 pont

Most bebizonyítjuk, hogy ez nem lehetséges.

Ehhez egy segédtételt mondunk ki: Ha egy költözés előtt az n., $(n+1)$., $(n+2)$. szobák valamelyikében volt lakó, akkor a költözés után is lesz.

A segédtétel könnyen látható, hiszen ha az egyik „szélen” egy lakó kiköltözött ebből a hármasból, akkor a másik lakó, akik a költözésben részt vett, a hármas belsejében maradt. 1 pont

A segédtétel felhasználásával megmutatjuk, hogy a költözések során az összes lakó a kollégium egy véges tartományán belül marad. Legyen kezdetben a a legkisebb szobaszám, ahol még lakik valaki, b pedig a legnagyobb, továbbá legyen a kollégiumban n lakó. Ekkor bárhogyan is követik egymást a költözések, senki nem tudja elhagyni az $a-3n$ és $b+3n$ közötti szakaszt.

Ehhez csak azt kell látni, hogy ha az $a-3n$ és $a-1$ közötti szobákat hármasával csoportosítjuk, akkor – a segédtétel miatt – csak úgy juthatna el egy lakó $a-3n-1$-ig, ha minden szoba-hármasban maradna legalább egy lakó. Ez viszont azt jelentené, hogy az összes lakó $a - 3b$ és $a - 1$ között lenne. Hasonlóan látható, hogy $b + 3n + 1$-ig sem juthat el senki. 1 pont

Összefoglalva: a lakók mindvégig az $a - 3n$ és a $b + 3n$ sorszámú szobák között mozoghatnak, és semelyik elrendezés nem ismétlődhet. Ezekből következik, hogy csak véges sok költözés történhet. 1 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzések. A megoldásban mutatott állapotfüggvény nem az egyetlen, amivel a ciklikusság kizárható, használható például a következő is: tekintsük az összes lakó-pár esetén szobáik távolságát, vagyis a $d_{i,j} = |s_i - s_j|$ értékeket, ahol s_i az i. lakó szobájának száma. Ezeket az értékeket minden lakó-párra összegezve olyan állapotfüggvényt kapunk, ami minden költözésnél növekszik.

Ha garantálni tudnánk, hogy a költözések egy véges tartományban zajlnak, akkor átszámozhatnánk úgy a szobákat, hogy minden szoba pozitív sorszámot kapjon. Ekkor a lakók szobaszámának szorzata is jó, hiszen

$$a^2 + a = a(a + 1) > (a - 1)(a + 2) = a^2 + a - 2,$$

tehát így egy nemnegatív értékű, monoton csökkenő állapotfüggvényhez jutunk.